

NÅGRA MINNEN FRÅN MIN STUDIETID VID STOCKHOLMS HÖGSKOLA

Av Harald Cramér

Då jag höstterminen 1912 började mina studier vid Stockholms Högskola, tvekade jag mellan att välja kemi eller matematik som huvudämne. Jag började med kemi, och min första akademiska anställning var som amanuens i biokemi hos professor Hans v. Euler. Men det stod snart klar för mig att det var matematiken som jag skulle komma att ägna mig åt. Efter en lång militärtjänst under krigsåren blev jag amanuens i matematik 1916, disputerade och blev docent 1917, och kvarstod som docent och tidvis t.f. professor i matematik tills jag 1929 blev utnämnd till professor i försäkringsmatematik och matematisk statistik. På denna befattning kvarstod jag vid Stockholm Högskola till 1958, då jag blev vald till universitetskansler.

Under min studietid hade Högskolan två professurer i matematik, vilka innehades av Ivar Bendixson och Helge v. Koch. Bendixson var Högskolans rektor och ledamot av Stockholms stadsfullmäktige, och var under åtskilliga år befriad från föreläsnings-skyldighet. Jag har dock kvar i minnet en föreläsningsserie i talteori, där han väckte mitt intresse för primtalens fördelning och andra problem i analytisk talteori, som jag sedan skulle komma att ägna mycket arbete åt. V. Koch höll utmärkta föreläsningar i funktionsteori och geometri, men var klen till hälsan och kunde ej ägna mycket tid åt att handleda sina elever. Den store matematikern Ivar Fredholm var professor i mekanik och matematisk fysik och höll utmärkta föreläsningar i dithörande ämnen, men jag kan ej minnas att jag någon gång hörde honom tala om integralekvationer, där han vid sekelskiftet hade gjort sin banbrytande insats. Mittag-Leffler, sedan några år pensionerad, föreläste fortfarande ibland vid Högskolan och ibland i sin bostad i Djursholm. Han talade om analytisk fortsättning av funktioner definierade genom potensserier, ett ämne som livligt inträffade mig. Men med ingen av dessa kunde en ung student etablera ett personligt förhållande och få uppslag till eget matematiskt arbete.

Den ledande personen inom den matematiska gruppen vid Högskolan var under mina studieår Marcel Riesz, en ungrare som av Mittag-Leffler inbjudits till Sverige, där han kom att stanna under hela sitt liv, först som docent vid Stockholms Högskola och sedan som professor i Lund. Under sina år vid Högskolan, 1912 - 1924, föreläste han som vikarie för Bendixson och var aktivt verksam inom den matematiska föreningen, där en kamratkrets av äldre och yngre matematiker

samlades. Han var full av idéer och generös med uppslag och handledning för de yngre. I sina föreläsningar behandlade han gärna ämnen inom aktuell matematisk forskning, som Lebesgues mått- och integrationsteori och teorien för trigonometriska serier och integraler. Genom hans förmedling kom den engelske matematikern G.H. Hardy vid flera tillfällen som gästföreläsare till Högskolan, vilket fick stor betydelse för oss yngre. Riesz tog också initiativ till ett samarbete mellan de matematiska föreningarna i Uppsala och Stockholm med föredragsbesök hos varandra, ett samarbete som dock kom att avstanna inför konkurrensen om en professur i Lund mellan Carleman i Uppsala och Riesz i Stockholm, där Carleman 1921 utgick som segrare.

Bland de äldre aktiva inom Stockholmskretsen nämner jag här Erik Stridsberg, algebraiker, och Severin Wigert, funktionsteoretiker med intresse för talteoretiska problem. Stridsberg var praktiskt verksam som försäkringsmatematiker, och Wigert var väl en av de sista som kunde kallas "privatlärd" - han hade ett kapital att leva på och ägnade sig helt åt matematisk forskning.

Bland mina jämnåriga minns jag K G Hagström, nära vän till Marcel Riesz, med starka filosofiska och historiska intressen, Josef Östlind, sysslände med Galois ekvationsteori, och Einar Hille, liksom jag en f.d. kemist, som tidigt kom ut till USA, där han förblev hela sitt liv och gjorde en framstående insats i modern matematisk analys.

Genom Mittag-Lefflers inflytande hade det blivit vanligt att de svenska livförsäkrings-bolagen anställde högt utbildade matematiker som sina ansvariga aktuarier, och många inom vår kamratkrets begagnade sig av den möjlighet, som härigenom yppade sig att skaffa sig ett levebröd. Svenska aktuarieföreningen, de försäkringstekniskt verksamma matematikernas sammanslutning, kom att stå i nära förbindelse med Högskolans matematiska förening. Aktuarieföreningens ordförande var Edvard Phragmén, f.d. professor i matematik vid Högskolan och numera försäkringsdirektör, men alltjämt aktiv som matematiker, bland annat i nära samarbete med Ernst Lindelöf i Helsingfors. Phragmén var en imponerande person, med omfattande och djupgående matematiska kunskaper och minnen från den märkliga tid då Sonja Kowlewsky verkade som professor vid Högskolan. I den minnesteckning över Phragmén som jag gav som avgående preses i Vetenskapsakademien 1958, har jag försökt ge en bild av honom och hans insats vid Högskolan och efter sin avgång.

Fram till 1924 fortsatte verksamheten inom matematikerkretsen i Stockholm på de linjer jag här beskrivit. Våren 1924 avled v. Koch, som länge varit sjuklig, och man ansåg det självklart att Marcel Riesz skulle kallas till hans efterträdare. Detta föreslogs också i en skrivelse till Högskolans Lärarråd, undertecknad av Bendixson, Fredholm och Phragmén. Enligt Högskolans stadgar hade det varit möjligt att omedelbart, med stöd av detta förslag av tre eminent sakkunniga personer besluta om kallelse. Men bakom kulisserna verkade Mittag-Leffler, vars sympatier för Riesz av någon anledning hade svalnat. Med förmedling av dansken Nörlund förmådde han nationalekonomen Cassel att i lärarrådets protestera mot förslaget och i stället föreslå Carleman, med motiveringen att denne nyligen vid konkurrensen i Lund blivit satt före Riesz. Märkvärdigt nog böjde sig lärarrådet för Cassel, förslaget att kalla Riesz nerröstades, och Carleman kallades till v. Kochs efterträdare. Carleman var en lysande matematiker, men helt utan intresse och förmåga att handleda och inspirera sina elever. Genom hans utnämning kom en död hand att läggas över det matematiska liv, som under ledning av Marcel Riesz hade utvecklats i Stockholm. Då Carleman några år därefter vid Bendixsons avgång genomdrev kallelse av sin Uppsalakamrat Fritz Carlson, blev regimförändringen fullständig.

Marcel Riesz blev 1926 utnämnd till professor i Lund och var därmed förlorad för den matematiska institutionen i Stockholm. För mig personligen medförde denna utveckling bland annat att min vetenskapliga verksamhet mer och mer kom att ägnas åt den matematiska sannolikhets-teori, som grundlagts av ryska och franska matematiker.

NÅGRA MINNEN FRÅN MIN STUDIETID VID STOCKHOLMS HÖGSOLA

II

Av Harald Cramér

I en tidigare uppsats har jag givit några minnesintryck av lärare och kamrater vid Stockholms Högskolas matematiska institution under 1910- och 20-talet. Jag skall här berätta något om mina egna studier och arbeten under samma tid.

Då jag i slutet av år 1914 blev filosofie kandidat med matematik, mekanik och kemi som examensämnen, hade jag redan klart för mig att jag i framtiden skulle komma att ägna mitt vetenskapliga intresse i första rummet åt matematiken. Under mina första studieår hade jag kommit att syssla med analytiska funktioner av en komplex variabel, med tillämpningar bland annat på teorien för Dirichletska serier och deras användning i analytisk talteori.

Det första världskriget hade nyss börjat, och under min långa militärtjänst, från januari 1915 till juni 1916, ägnade jag min lediga tid åt att fördjupa mina kunskaper i matematik. Framför allt läste jag litteratur om primtalsteori och Dirichletska serier. Från början av höstterminen 1916 var jag amanuens i matematik vid Stockholms Högskola och kom då att nära samarbeta med Marcel Riesz, som var både min lärare, min kollega och min vän. Då jag lät honom se mina försök att under enkla förutsättningar analytiskt fortsätta en given Dirichletsk serie utanför dess konvergensområde, hänvisade han mig till Euler-Maclaurin's summationsformel, som visade sig vara det rätta analytiska instrumentet för behandlingen av mina problem. Ett annat, mera djupgående sådant instrument fick jag av en berömd funktionsteoretisk sats av Phragmén och Lindelöf. Resultatet av mitt arbete med dessa hjälpmedel blev min doktorsavhandling "Sur une classe de séries de Dirichlet", ventilerad i maj 1917, och en följande uppsats om liknande ämnen i KVA:s Arkiv 1918. I samma Arkiv publicerade jag också några satser om summation av Fourier-serier, med lösningar av problem som ställts av Riesz under hans föreläsningar.

Under de närmaste åren kom jag nu framför allt att intressera mig för analytisk talteori. Jag hade den glädjen att få personliga kontakter med G.H. Hardy i Cambridge, Edmund Landau i Göttingen och Harald Bohr i Köpenhamn. Efter att ha skrivit några arbeten om Riemanns Zetafunktion, som tryckts i *Mathematische Zeitschrift*, fick jag uppdrag att tillsammans med Harald Bohr skriva en artikel om

analytisk talteori för den tyska matematiska encyklopedien. Det blev ett stort arbete, som vi uppdelade så, att Bohr skrev en första del om de Dirichletska serierna, medan jag skrev om deras användning på själva de talteoretiska problemen, framför allt beträffande primtalen. Då vi sammanträffade vid matematikerkongressen i Helsingfors 1922, var detta arbete just avslutat. Vid samma kongress höll jag ett föredrag om några talteoretiska medelvärdesatser, där jag under dessa år publicerade några resultat, som sedan förts vidare av andra, särskilt av Jarnik i Prag.

Inom primtalsteorien kom jag att stt särskilt arbeta med frågor rörande storleksordningen av differenserna mellan konsekutiva primtal. Min vän Viggo Brun i Norge hade gjort djupgående undersökningar rörande frekvensen av *små* sådana differenser, särskilt problem angående "primtalstvillingar". För min del sysslade jag med de *stora* differenserna, och kunde med hjälp av mina arbeten om Riemanns Zetafunktion ge vissa övre gränser för frekvensen av sådana differenser utöver en viss storleksordning. Så sent som 1936 publicerade jag i *Acta Arithmetica* en sammanfattning av mina arbeten kring dessa problem. Det blev mitt sista bidrag till den analytiska talteorien.

Från början av år 1920 var jag ansvarig aktuarie i ett livförsäkringsbolag i Stockholm, samtidigt som jag på deltid fortsatte som lärare vid Stockholms Högskola. Min försäkringstjänst och mitt samarbete med kolleger i Svenska Aktuarieföreningen riktade mitt intresse mot den matematiska sannolikhets teorien och dess tillämpningar på försäkringsverksamhet. I ett arbete av 1920 hade Georg Pólya i Zürich behandlat den sats, som senare kommit att bli allmänt känd under den av honom införda benämningen "sannolikhets teoriens centrala gränsvärdesats" och visat dess samband med andra aktuella matematiska frågor. Satsen går tillbaka till Laplace, men bevisades strängt först av Liapunov 1901. I nu gängse terminologi utsäger den att summan av ett oändligt växande antal oberoende stokastiska variabler under vissa allmänna villkor är asymptotiskt normalfördelad. Jag insåg dess betydelse för användningar inom den försäkringsmatematiska riskteorien och ägnade mig först åt att försöka skärpa den av Liapounov givna restuppskattningen. Vid den nyssnämnda matematikerkongressen i Helsingfors 1922 gav J. W. Lindeberg ett helt nytt bevis för satsen under allmännare villkor än Liapounov, vilket ytterligare stimulerade mitt intresse.

Snart fann jag emellertid att varken Liapounovs eller Lindebergs restuppskattning gav en tillräcklig noggrannhet för de riskteoretiska användningarna. Jag frågade

mig då om det skulle vara möjligt att betrakta den normala fördelningsfunktionen som första term i någon serieutveckling, där ett medtagande av flera successiva termer skulle ge ett noggrannare resultat. En utveckling av detta slag hade förut angivits av professor Charlier i Lund, men varken hans bevis eller hans slutsats var matematiskt korrekta. Jag angrep problemet och kunde i ett föredrag vid matematikerkongressen i Köpenhamn 1925 ge några preliminära resultat. Den fullständiga lösningen presenterades 1928 i ett arbete, publicerat i Skandinavisk Aktuarietidskrift, som omfattade både den rent matematiska teorien och dess olika användningar. Detta arbete var mitt viktigaste specimen för professorsutnämningen 1929.

För den matematiska sannolikheteorin och dess användningar var 1920-talet en brytningstid. Inom den rent matematiska teorien utvecklades nya idéer av v. Mises i Tyskland, av Paul Lévy i Frankrike och Khintchine och Kolmogorov i Sovjetunionen. Och i England verkade R.A. Fisher och andra, som ägnade sig åt de statistiska användningarna. Jag hade med intresse följt denna utveckling och försökt att själv ge några bidrag till den. Och då jag höstterminen 1919² började verka som nybliven professor, hade jag den glädjen att, omgiven av en liten krets av begåvade och ambitiösa elever, få göra en aktiv insats i den fortsatta utvecklingen. Men vid denna punkt kan det vara lämpligt att avsluta dessa minnesanteckningar från min studietid.