MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Lösningar till tentamensskrivning i
Kombinatorik pk
2001-10-22

1. Uppgiften kan lösas på många goda sätt.

Sätt $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Man kan nu räkna ut $A(x)$ som en kvot av två polynom, och sedan partialbråksuppdela detta, och till sist få fram den slutna formen för a_n, om man vill. En alternativ lösningsmetod är, att först bestämma nämnaren för $A(x)$, sedan a_n med direkt insättning, och till sist beräkna $A(x)$ täljare från detta. Jag redovisar denna lösning här.

Eftersom $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2n - 5 + 2^{n-1}$ för $n \geq 2$, och $1 - 3x + 2x^2 = (1-x)(1-2x)$, får vi faktorerna $1 - x$ och $1 - 2x$ i nämnaren. $(2n-5) \cdot 1^n$ ger faktorn $(1-x)^2$, och $0,5 \cdot 2^n$ faktorn $x - 2$. Nämnaren är alltså $(1-x)^3(1-2x)^2$. Därför är $a_n = (b + cn + dn^2) \cdot 1^n + (e + fn) \cdot 2^n$, för fem konstanter b, c, d, e, f. Vidare är följdens 5 första värden 0; 1; $3 - 0 + 2 \cdot 2 - 5 + 2^1 = 4$; $3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 5 + 2^2 = 15$; och $3 \cdot 15 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 - 5 + 2^3 = 48$. Detta ger ett ekvationssystem, och efter Gausselimination rakt på samt bakåtsubstitution lösningen

$$\begin{cases} b & & & +e & & = 0 \\ b & +c & +d & +2e & +2f & = 1 \\ b & +2c & +4d & +4e & +8f & = 4 \\ b & +3c & +9d & +8e & +24f & = 15 \\ b & +4c & +16d & +16e & +64f & = 48 \end{cases} \iff \begin{cases} b & & & +e & & = 0 \\ & c & +d & +e & +2f & = 1 \\ & & 2d & +e & +4f & = 2 \\ & & & e & +6f & = 6 \\ & & & & 2f & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ e = 0 \\ f = 1 \end{cases}$$

Alltså är $a_n = n \cdot 2^n - n^2$.

För att bestämma $A(x)$ kan vi t. ex. skriva om n och $-n^2$ som lämpliga lineärkombinationer av binomialkoefficienter: $n = \binom{n+1}{n} - \binom{n}{n}$, och $-n^2 = -2\binom{n+2}{n} + 3\binom{n+1}{n} - \binom{n}{n}$, så

$$A(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-2x)^2} - \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2x(1-x)^3 - (x+x^2)(1-2x)^2}{(1-2x)^2(1-x)^3} = \frac{x - 3x^2 + 6x^3 - 6x^4}{(1-2x)^2(1-x)^3}.$$

2. **SALSASAL** består av 3 **A**, 3 **S** och 2 **L**; så den exponentiella genererande funktionen för ord bildade av dessa bokstäver är $(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)^2(1 + x + \frac{1}{2}x^2) = 1 + 3x + 4\frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{11}{12}x^4 + 1\frac{5}{12}x^5 + \frac{35}{72}x^6 + \frac{1}{9}x^7 + \frac{1}{72}x^8 = 1 + 3x + 9x^{(2)} + 26x^{(3)} + 70x^{(4)} + 170x^{(5)} + 350x^{(6)} + 560x^{(7)} + 560x^{(8)}$ (där $x^{(n)}$ betecknar den 'delade potensen' $\frac{x^n}{n!}$). Således är antalet ord man kan bilda av längd k 1, 3, 9, 26, 70, 170, 350, 560 och 560, när $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ respektive 8.

3. **Observera misstaget i frågans formulering:** De fyra kalvarna är förstås inte "årsgamla" (födda förra året), utan tänks vara *jämnåriga* men betydligt mer än ettåriga. (Lyckligtvis påverkar detta inte alls matematiken.)

a) Från början har vi $4! = 24$ tänkbara ordningar av de 4 'tjurskallarna'. Efter varje match kan vissa ordningar uteslutas (nämligen de som strider mot utgången av matchen). Har Edda maximal otur, så försvinner aldrig mer än högst hälften av de återstående möjligheterna vid en match. Eftersom $24 > 16 = 2^4$ räcker alltså inte 4 matcher i värsta fall.

Annorlunda uttryckt: Betraktar man det binära beslutsträd som motsvarar en matchordning, så måste det ha 24 löv, och därför höjd minst 5.

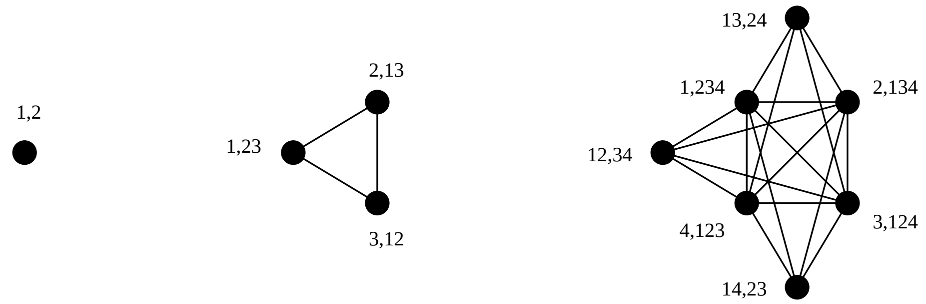
¨Å andra sidan räcker 5 matcher, enligt följande. Låt först B möta E och K möta S, och låt därefter de två vinnarna göra upp. I totalt tre matcher har vi då hittat en oomstridd ledare för gruppen. Det återstår att rangordna de övriga tre sinsemellan. Två av dessa har redan utkämpat en match. Låt den tredje slåss mot båda dessa två (två matcher till, alltså). Då har alla mött alla av dessa tre, vilket räcker för rangordning. Den sista matchen inställes dock om de två kombattanterna skulle råka ha blivit rangordnade redan.

Exempel: Om B slår E, S slår K, och därefter S slår B, så är S obestridd ledare. Av de övriga har B och E redan mötts. Låt nu i fjärde matchen K möta någondera B eller E, t. ex. B. Leder detta till att alla är ordnade (för att K slår B och alltså får högre rang än E i exemplet), så är allt frid och fröjd; annars får de två ännu ej sinsemellan ordnade (K och E) göra upp i en femte och avslutande strid.

b) Ett beslutsträd måste denna gång ha $5! = 120 > 64 = 2^6$ löv, så minst 7 matcher behövs i värsta fall. (Det finns en strategi som aldrig kräver mer än sju matcher, men den är litet snårig att komma på, och behövde inte redovisas.)

4. a) Se figur 1 nedan, där jag har använt ett förkortat skrivsätt för hörnen. Till exempel står $2, 134$ för partitionen $\{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}$ av $\{1, 2, 3, 4\}$.

Figure 1:



b) Hörnet $v = \{\{1\}, \{2, \ldots, n\}\}$ har kant till varje annat hörn $\{A, B\}$, eftersom $1 \in A \vee 1 \in B \implies \{1\} \subset A \vee \{1\} \subset B$. Övriga hörn är förbundna via v.

c) Att $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ är en kant betyder precis att A är en äkta delmängd av en av parterna i $\{C, D\}$, säg C, eller att B är det. (Bådadera samtidigt går inte – varför?) $A \subset C$ kräver att C innehåller alla k element i A, samt minst ett men inte samtliga element i B (eftersom $A \neq C$ och $D \neq \emptyset$). Det finns därför $2^{n-k} - 2$ olika sådana C. På motsvarande sätt gäller $B \subset C$ i $2^k - 2$ fall. Alltså är valensen (eller graden) för hörnet $\{A, B\}$ $(2^{n-k} - 2) + (2^k - 2) = 2^k + 2^{n-k} - 4$.

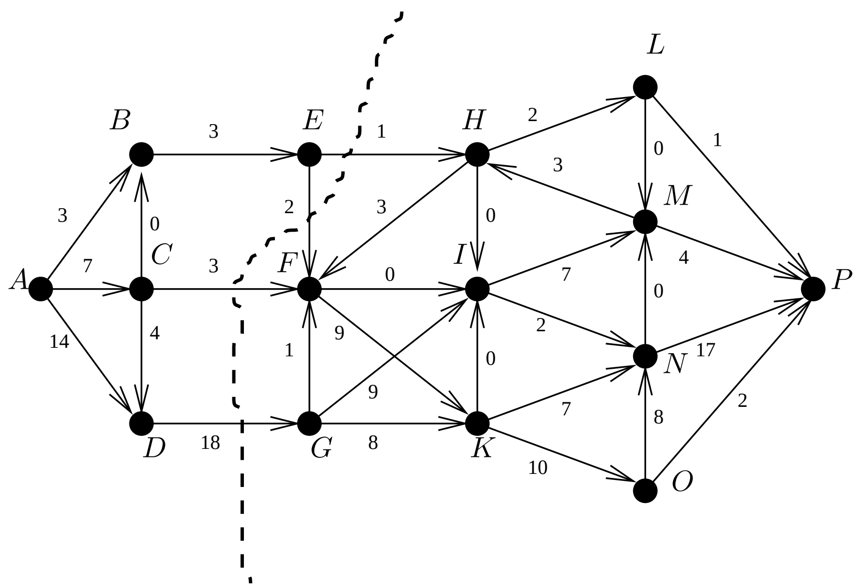
d) (G_2 saknar kanter; och det är en definitionsfråga huruvida man kan betrakta en promenad av längd noll som en Eulerkrets.) För $n \geq 3$ är G_n sammanhängande enligt b), och vart hörn i G_n har jämn valens enligt c); så G_n har en Eulerkrets för varje $n \geq 3$.

e) Det kromatiska polynomet för G_4 kan beräknas på många sätt. Allra enklast är nog att notera att de fyra partitionerna i *olika stora* parter bildar en 4-klick (d. v. s. en komplett delgraf om 4 hörn), så att det finns $x(x-1)(x-2)(x-3)$ sätt att färga dessa med x färget till förfogande; och att då vart och ett av de återstående tre hörnen kan färgas med vilken som helst av de $x - 4$ färger som inte använts för hörnen i 4-klicken, oberoende av varandra. Svaret måste alltså vara $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)^3$.

5. a) Ett maximalt flöde och ett minimalt snitt är utsatta i figur 2 nedan.

b) (Se Grimaldi, avsnitt 13.3; särskilt exempel 13.8 och sats 13.3.)

Figure 2:



L
B
3
E
1
H
2
0
1
3
0
3
M
3
2
0
A
7
C
3
F
0
I
7
4
P
0
14
4
9
1
0
2
17
N
9
7
2
8
D
18
G
8
K
10
O