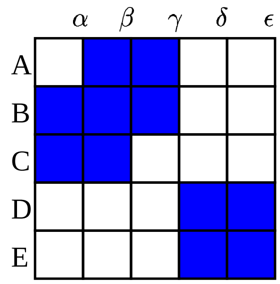
1. Att alla har minst en bordsgranne av annan nationalitet är ekvivalent med att alla har högst en bordsgranne av samma nationalitet. Vi kan dela in i olika fall beroende på hur många som har en bordsgranne av samma nationalitet.

   Om ingen har bordsgranne av samma nationalitet, så sitter man alltså varannan svensk, varannan grek, om vi placerar ut grekerna först, så kan detta göras på $6!/6 = 5!$ sätt (vi delar med 6 för att vi kan rotera bordet), de 6 svenska gästerna skall sedan placeras i de 6 luckorna vilket kan göras på $6!$ sätt. Detta fall ger alltså $6!\,5!$ olika placeringar. Nästa fall som skall behandlas är att det finns precis 2 grekiska gäster som har en grekisk bordsgranne (dessa två sitter alltså bredvid varandra), detta innebär att det också finns 2 svenskar som har en svensk bordsgranne, (vi har 5 luckor, skall placera ut 6 svenskar i dessa; minst 1 och högst 2 i varje lucka). Antalet sätt att välja ut dessa par är $\binom{6}{2}^2$ vi kan nu betrakta dessa par som enheter vid utplaceringen och får då att vi måste ha varannan svensk, varannan grekisk enhet, grekerna kan placeras ut på $5!/5 = 4!$ sätt, och svenskarna kan fyllas på på $5!$ sätt. Varje par kan också sitta på 2 olika sätt. Totalt blir detta $2^2\,5!\,4!\binom{6}{2}^2$. Vi kan också ha 4 grekiska gäster som har precis en landsman till bordet, detta ger som förut att det finns 4 svenska gäster som också har precis en landsman till bordet, de två grekiska paren kan väljas på $\binom{6}{4}\binom{4}{2}$ sätt, liksom de svenska. Vi har nu 4 "enheter" av varje nationalitet som omväxlande skall placeras ut kring bordet, det kan göras på $3!\,4!$ sätt. Även här kan varje par sitta på 2 olika sätt vilket ger en faktor 2^4 Detta fall ger oss alltså $2^4\,3!\,4!\binom{6}{4}^2\binom{4}{2}^2$ möjligheter. Till sist har vi fallet där alla greker har precis en landsman till bordet, vilket också nu ger att alla svenskar har en landsman till bordet. Vi har alltså tre par av greker respektive svenskar, som vardera kan väljas ut på $\binom{6}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ sätt. De tre grekiska paren kan sedan placeras ut på $3!/3 = 2!$ sätt, och de svenska kan sedan ordnas på $3!$ sätt. De sex paren kan också inbördes ordnas på 2 sätt vardera, vilket ger en faktor 2^6

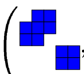
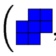
   Detta sista fall ger oss alltså $2^6\,2!\,3!\binom{6}{4}^2\binom{4}{2}^2\binom{2}{2}^2$. Det totala antalet bordsplaceringar blir nu

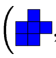
$$6!\,5! + 5!\,4!\binom{6}{2}^2 + 2^4\,3!\,4!\binom{6}{4}^2\binom{4}{2}^2 + 2^6\,2!\,3!\binom{6}{4}^2\binom{4}{2}^2.$$

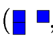
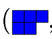
2. Vi kan raskt formulera om problemet till att räkna antal sätt vi kan placera ut 5 stycken inbördes ohotande torn på de vita rutorna nedan:



Vi beräknar tornpolynomet för de mörkare rutorna och får

$$r\Big($$  $$, x\Big) = r\big($$  $$, x\big)\, r\big($$  $$, x\big) =$$

$$\Big(x \cdot r\big($$  $$, x\big) + r\big($$  $$, x\big)\Big)(1+4x+2x^2) =$$

$$\big(x(1+4x+2x^2) + x \cdot r\big($$  $$, x\big) + r\big($$  $$, x\big)\big)(1+4x+2x^2) =$$

$$\big(x(1+4x+2x^2) + x(1+3x+x^2) + (1+5x+4x^2)\big)(1+4x+2x^2) =$$

$$(1+7x+11x^2+3x^3)(1+4x+2x^2) = 1+11x+41x^2+61x^3+34x^4+6x^5$$

Vi kan sedan få det sökta antalet med hjälp av inklusion-exklusion

$$5! - 11 \cdot 4! + 41 \cdot 3! - 61 \cdot 2! + 34 \cdot 1! - 6 \cdot 0! =$$
$$120 - 264 + 246 - 122 + 34 - 6 = 400 - 392 = 8.$$

Således är 8 placeringar möjliga. (Det är så få att man faktiskt kan räkna upp dem för hand).

3. Eftersom vi har att $\mathrm{id}(x) = 2$ för alla (båda) hörnen i grafen så kan varje vandring $x_1e_1x_2e_2\ldots e_nx_{n+1}$ (x_i är hörn och e_i är kanter) av längd n förlängas till $x_0e_0x_1e_1x_2e_2\ldots e_nx_{n+1}$ på precis 2 sätt. (Vi förlänger alltså i början och inte i slutet). Tillsammans med det faktum att det finns 2 vandringar av längd 0, så får vi omgående att antalet vandringar av längd n är 2^{n+1}.

   Detta byggde ju på en ganska speciell egenskap hos grafen; så en mer generell (men mer komplicerad i detta fall) metod är att sätta upp ett system av rekursioner, Låt a_n respektive b_n vara antalet vandringar av längd n som slutar i det vänstra respektive högra hörnet, vi får då för $n \geq 0$
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$
   Från detta får vi rekursionen $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$ för $n \geq 0$. Tillsammans med begynnelsevärdena $b_0 = 1$, och $b_1 = 2$ får vi att $b_n = 2^n$ och därmed ser vi att $a_n = 2^n$ och antalet vandringar av längd n är då $a_n + b_n = 2^{n+1}$.

4. Om vi har en (äkta) färgning av $\hat{G}$ så ser vi att en färg som har använts till något av de "nya" hörnen i $\hat{G}$ inte kan användas till något av de "gamla" hörnen. Så givet λ färger till vårt förfogande kan vi välja att färga de nya hörnen i samma färg, vi måste då använda de resterande $\lambda - 1$ färgerna

för att färga hörnen i G, så det totala antalet färgningar vi kan få på detta sätt är $\lambda\, P(G, \lambda - 1)$. Om vi istället färgar de nya hörnen med två olika färger, måste hörnen i G färgas med de kvarvarande $\lambda - 2$ färgerna, men detta kan ske på vilket sätt som helst som ger en äkta färgning av G, så det totala antalet färgningar vi får på detta sätt är $\lambda(\lambda - 1)\, P(G, \lambda - 2)$. Alltså har vi

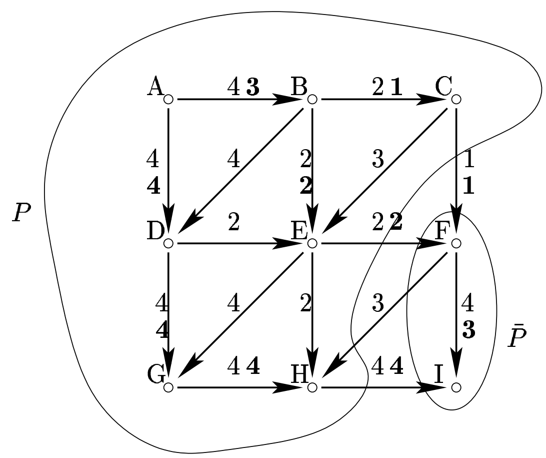
$$P(\hat{G}, \lambda) = \lambda P(G, \lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1) P(G, \lambda - 2).$$

Grafen vars hörn är tärningens sidor, och har kant mellan två hörn precis då dessa har gemensam sida är isomorf med $\hat{C}_4$. Eftersom vi vet att $P(C_4, \lambda) = (\lambda - 1)^4 + (\lambda - 1)$ så får vi

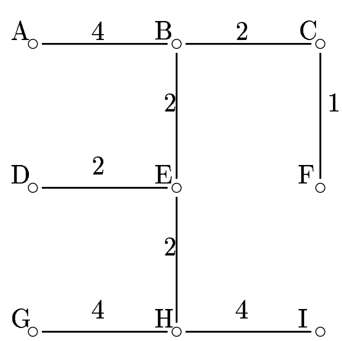
$$P(\hat{C}_4, \lambda) = \lambda((\lambda - 2)^4 + (\lambda - 2)) + \lambda(\lambda - 1)((\lambda - 3)^4 + (\lambda - 3)),$$

vilket är det sökta antalet.

5. Märkningsalgoritmen (se Grimaldi) ger oss till exempel följande maximala flöde (skrivet med fetstil) med värde 7 och det minimala snittet $(P, \bar{P})$ med kapacitet 7.



Ett minimalt spännande träd är till exempel



6. Vi betraktar den exponentiella genererande funktionen

$$f(x) = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\cdots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\cdots\right) =$$
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2}(e^x - 1)e^x = \frac{e^{4x} - e^{3x} - 1 + e^{-x}}{4}$$

Koefficienten för $x^n/n!$ i serieutvecklingen av detta är

$$\frac{1}{4}\left(4^n - 3^n + (-1)^n\right), \quad n \geq 1$$

vilket också är det sökta talet.