Rationella rötter till ekvationer med heltalskoefficienter

Antag att ekvationen $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ har heltalskoefficienter, dvs alla a_i är heltal. OM ekvationen har rationella rötter, kan man lätt hitta dem. (En ekvation med heltalskoefficienter behöver förstås inte ha några rationella rötter, som $x^2 - 2 = 0$ visar.) Antag att p/q är en rot till ekvationen, där p och q är heltal och bråket är förkortat. Då ska vi visa att $p|a_0$ och $q|a_n$. Att p/q är en rot betyder att $a_n(p/q)^n + \cdots + a_1(p/q) + a_0 = 0$. Multiplicera med q^n! Detta ger $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Nu ser man att $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1}$ är delbart med p, men $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} = -a_0 q^n$, så $-a_0 q^n$ är alltså delbart med p. Eftersom p och q är relativt prima (bråket förutsattes förkortat), så är p och q^n relativt prima, så p måste dela a_0. På liknande sätt ser man att q delar a_n.

Exempel. Betrakta ekvationen $4x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$. Om p/q är en förkortad rationell rot gäller att $p|3$ och $q|4$. Detta ger att $p = \pm 1, \pm 3$ och $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, så de enda möjliga rationella rötterna är $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4$. Prövning ger att $3/2, -1/2$ och 1 är rötter.