Problem

Induktion och rekursion

1. Visa att $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
2. Bevisa att $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ för alla $n \geq 1$.
3. Visa att för alla naturliga tal n gäller
$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{1+(2n-1)3^n}{4}.$$
4. Bestäm alla naturliga tal n som satisfierar olikheten $3^n > 4n^2$. (Du måste bevisa ditt påstående.)
5. Bevisa att det finns ett positivt heltal N så att $n! > (n+1)2^n$ gäller för alla $n \geq N$.
6. Visa med induktion att om a är reellt och > -1, så gäller att
$$(1+a)^n \geq 1 + an$$
för alla heltal $n \geq 1$.
7. Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras genom $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ och $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ för $n = 1, 2, 3 \ldots$. Visa att $a_n = 3^{n-1} + 1$.
8. En följd definieras genom $a_1 = 0$, $a_2 = 3$ och $2a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 6n - 5, n \geq 3$. Gissa en explicit formel för a_n och visa med induktion att din gissning är korrekt. (a_n skall alltså skrivas på formen $a_n = f(n)$, där f är en funktion, definierad för de positiva heltalen.)
9. Definiera Fibonaccitalen F_n $(n \geq 0)$ rekursivt som
$$F_0 = F_1 = 1\,, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$
   (a) Visa att $\mathrm{SGD}(F_n, F_{n+1}) = 1$ för alla $n \geq 0$.
   (b) Visa att $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ för alla $n \geq 1$.
10. Bevisa olikheten
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \geq 1.$$
11. Bevisa olikheten
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \geq 1.$$

Heltalen

12. Bevisa att $n^2 - 1$ är delbart med 8 för alla udda heltal n.
13. Bevisa att talet $n^3 - n$ är delbart med 6 om n är ett naturligt tal, och delbart med 24 om n är ett udda naturligt tal.
14. Bestäm $\mathrm{SGD}(9563, 6205)$.
15. Förkorta så långt som möjligt $\frac{3451}{8381}$.
16. Förkorta så långt möjligt i bråket $\frac{196707}{250971}$.
17. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $43x + 19y = 4$.
18. Lös den diofantiska ekvationen $114x + 303y = 168$.
19. Lille Per har av sin moder fått 250 kr för att gå till konditoriet och köpa lyxsemlor till ett pris av 17 kr per styck och mandelkakor till ett pris av 6 kr per styck. När han är framme i konditoriet har han hunnit glömma hur många av de två slagen bakverk han skulle köpa. Han minns dock att inga pengar skulle bli över och att antalet mandelkakor var ett udda tal. Hjälp lille Per!
20. Bestäm alla heltal x sådana att 379 är en delare i $2078x - 1$.

21. Bestäm det minsta positiva heltal n för vilket $n \equiv 12 \pmod{37}$ och $n \equiv 7 \pmod{43}$. (Ledning: Ställ upp en diofantisk ekvation, vars lösning användes för att finna n).

22. Ett positivt heltal kallas perfekt (eller fullkomligt) om det är lika med summan av 1 och sina äkta positiva delare (exempelvis är 6 perfekt, ty $6 = 1 + 2 + 3$). Bestäm primtalet p så att talet $16p$ blir perfekt.

23. Bestäm ett så litet som möjligt positivt heltal x så att $36x^2 + 29y = 1$ gäller för något heltal y. Bestäm också motsvarande y.

Kombinatorik

24. Hur många 6-siffriga tal kan man bilda med hjälp av $0, 1$ och 2 om talen skall innehålla minst en nolla?

25. Hur många heltal i intervallet [1000,9999] finns det
   (a) där varje siffra (utom den första) är strikt mindre än närmast föregående
   (b) där varje siffra (utom den första) är mindre än eller lika med närmast föregående?

26. Hur många sexsiffriga tal finns det som kan skrivas med två ettor, två tvåor, en trea och en femma, så att trean och femman inte står bredvid varandra. (Exempelvis 121325 men inte 121235 eller 121253).

27. Hur många olika stryktipsrader med sju 1:or, två X och fyra 2:or finns det? (Som bekant består en stryktipsrad av en uppställning, där man för vardera av 13 olika matcher tippat endera 1 eller X eller 2.)

28. En kortlek består som bekant av 52 kort i fyra olika färger, vardera med 13 kort i olika valörer. I en pokergiv får en spelare fem kort (ordningsföljden är oväsentlig).
   (a) Hur många olika pokerhänder finns det?
   (b) Hur många av dessa innehåller ett fyrtal, dvsfyra kort i samma valör?
   (c) Hur många händer innehåller två par, dvstvå kort i en valör, två kort i en annan valör, samt ett av en tredje valör?

29. Vid en kassa i en systembutik står först A_1 och sedan i tur och ordning A_2,A_3,A_4,A_5 och A_6 i kö och vid en annan kassa står på motsvarande sätt B_1,B_2,B_3,B_4 och B_5 i kö.Kassorna skall stängas och de köande skall samtliga ställa sig i kö vid en nyöppnad kassa så att ordningen mellan $A_1, ..., A_6$ bevaras, liksom ordningen mellan $B_1, ..., B_5$. Dessutom kommer A_3 och B_2 (som inte har träffats på länge och har mycket att prata om) att ställa sig intill varandra i den nya kön.På hur många sätt kan den nya kön se ut?

30. På en pappersremsa står ordet $GEOMETRI$. Man klipper upp remsan så att man får åtta papperslappar så att det på var och en finns en bokstav. Hur många "ord" bestående av 3 bokstäver kan man bilda genom att lägga ut dessa lappar?

31. Antag att vi har 9 röda och 6 svarta bollar. Hur många följder av längd 15 kan vi bilda av dessa bollar givet att de första r bollarna är svarta. (För vilka r är problemet lösbart?)

32. I en mängd med 11 element skall man bestämma två delmängder A och B, sådana att A innehåller 6 element och B innehåller 5 element varav 2 element är gemensamma i A och B. På hur många sätt kan detta göras?

33. Antag vi har en mängd A bestående av 12 element och en mängd B bestående av 8 element, och antag att $A \cap B$ består av 4 element. På hur många sätt kan vi välja ut 4 element från $A \cup B$, om vi kräver att något av de utvalda elementen skall tillhöra A och något skall tillhöra B?

34. Antag givet två mängder A och B med $\#(A) = \#(B) = 12$ och $\#(A \cap B) = 6$. På hur många sätt kan man välja en delmängd C av $A \cup B$ så att $\#(A \cap C) = \#(B \cap C) = 3$? (Svaret skall lämnas i uträknad form. $\#(M)$ betecknar antalet element i mängden M).

35. Bestäm koefficienten för x^2 i utvecklingen av $(\frac{x}{3} - \frac{1}{x^3})^{10}$.

36. Bevisa att
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n, \quad n \geq 1.$$

Ekvivalensrelationer

37. (a) Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{R}$ genom $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Visa att detta ger en ekvalensrelation. Hur ser ekvivalensklasserna ut?

   (b) Samma fråga för $\sim$ på $\mathbb{R}^2$ med $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$.

   (c) Som (b), men med $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$.

38. (a) För polynom $f(x)$ och $g(x)$ med reella koefficienter definierar vi $f(x) \sim g(x) \iff f(2) = g(2)$. Visa att detta ger en ekvalensrelation. Hur ser ekvivalensklasserna ut?

(b) Samma fråga då $f(x) \sim g(x) \iff f'(x) = g'(x)$ (dvs. de har samma derivata).

Kongruenser

39. Visa att $3^{100} - 1$ är jämnt delbart med 16.

40. Vilken rest erhålles då 2^{100} delas med 23?

41. Vilken är sista siffran i talet 37^{100}?

42. Vad skulle sista siffran bli om man skulle uttrycka talet $\left(17^{15} + 8^{25}\right)^{10}$ i positionssystemet med basen 10 (på det vanliga sättet).

43. Visa att talet $n^3 + 2n$ är delbart med 3 för alla heltal n.

44. Visa att för varje heltal n som inte är multipel av 7 gäller att n^6 vid division med 7 ger resten 1.

45. Bestäm för varje naturligt tal n den minsta ickenegativa resten vid division av $3^{2n} + 2 \cdot 17^{6n}$ med 7.

46. För vilka naturliga tal n gäller att $2^n \equiv 1 \pmod 9$?

47. Bestäm det största n för vilket $x^5 \equiv x \pmod n$ för alla heltal x.

48. (a) Bestäm alla invertibla element i $\mathbb{Z}_{12}$, ach ange deras inverser.

    (b) Visa att de invertibla elementen i $\mathbb{Z}_{12}$ bildar en grupp under multiplikation, och ange multiplikationstabellen.

49. Bestäm om möjligt inversen till $[91]_{501}$ i $\mathbb{Z}_{501}$.

Grupper

50. Skriv ner multiplikationstabellerna för de multiplikativa grupperna $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ och $\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}$.

51. Låt $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Definiera $*$på S som $a * b = a + b + ab$. Visa att S blir en grupp under $*$.

52. För $a, b \in \mathbb{R}$, med $a \neq 0$, låter vi $\varphi_{a,b}$ vara funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$. Visa att mängden $M = \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ bildar en grupp under sammansättning av funktioner. Bestäm speciellt identitetselement samt inversen till $\varphi_{a,b}$.

53. (a) Om $\{x, y\}$ skall bli en grupp under en binär operation $*$, med x som identitetselement, hur skall dess multiplikationstabell se ut?

    (b) Motsvarande fråga för $\{x, y, z\}$.

54. Bestäm gruppen av symmetrier av (a) en romb; (b) en godtycklig parallellogram.

55. Visa för x, y i en grupp att xy och yx har samma ordning.

56. (a) Visa att ett element $\neq e$ i en grupp har ordning 2 om och endast om det är sin egen invers.

    (b) Visa att varje grupp av jämn ordning har ett element av ordning 2. [Ledning: Använd (a)].

57. Ange för varje $n \leq 10$ den högsta ordning som förekommer hos element i S_n.

Polynom och algebraiska ekvationer

58. Vad blir resten då $x^{100} - 1$ delas med $(x-1)(x-2)$?

59. Ett polynom $p(x)$ är sådant att $p(x) - 1$ är delbart med $x + 1$ och $p(x) + 2$ är delbart med $x - 2$. Vad blir resten då $p(x)$ divideras med $(x+1)(x-2)$?

60. Visa att $g(x) = x^3 + 1$ delar $f(x) = x^{9999} + 1$. [Ledning: Tänk på faktorsatsen.]

61. Antag att $f(x)$ ger resten 1 vid division med $x - 1$ resten 3, vid division med $x + 1$ och resten 3 vid division med $x - 2$. Bestäm resten av $f(x)$, vid division med $(x-1)(x+1)(x-2)$.

62. Bestäm SGD för följande polynom $f(x)$ och $g(x)$, och uttryck den på formen $\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)$:
    (i) $f(x) = x^8 - 1$ och $g(x) = x^6 - 1$ i $\mathbb{Q}[x]$.
    (ii) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ och $g(x) = x^3 - 1$ i $\mathbb{Q}[x]$.
    (iii) $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 1$ och $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ i $\mathbb{Q}[x]$.
    (iv) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ och $g(x) = x^2 + x + 1$ i $\mathbb{Z}_3[x]$.

63. Bestäm största gemensamma delaren till de två polynomen
$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 \qquad \text{och} \qquad x^4 + x^2 + 1.$$

64. Faktorisera fullständigt följande polynom:
   (i) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 15x - 2$ i $\mathbb{Q}[x]$.
   (ii) $x^4 + x$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.
   (iii) $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.
   (iv) $x^p - x$ i $\mathbb{Z}_p[X]$, där p är ett primtal.

65. Bestäm alla värden på a så att polynomen $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ och $q(x) = x^3 + 2x + a$ i $\mathbb{Q}[x]$ får en icke-trivial största gemensam delare, och ange dessa. [Ledning: Faktorisera det första polynomet.]

I det följande betraktas ekvationer med rationella koefficienter och komplexa rötter.

66. Lös ekvationen $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = 0$, vilken har två rationella rötter.

67. Lös ekvationen $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$, vars rötter allesammans är rationella.

68. Bestäm en tredjegradsekvation med heltalskoefficienter som har en rot $= 1 + \sqrt[3]{2}$, samt bestäm ekvationens övriga rötter.

69. Ekvationerna $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$ och $x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0$ har en gemensam rot. Lös ekvationerna.

70. Bestäm ett polynom med heltalskoefficienter sådant att talet $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ är ett nollställe till detta polynom. Använd detta för visa att talet $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ är irrationellt.

Svar till vissa uppgifter: 14: 73. – 15: $7/17$. – 16: $29/37$. – 17: $x = 16 + 19n$, $y = -36 - 43n$ med godtyckliga $n \in \mathbb{Z}$. – 18: $x = 448 - 101n$, $y = 38n - 168$ för heltal n. – 19: 8 lyxsemlor och 19 mandelkakor. – 20: $x = 29 + 379n$ för något $n \in \mathbb{Z}$. – 21: 308. – 22: 31. – 23: $x = 5, y = -31$. – 24: 422. – 25: a) 210; b) 714. – 26: 120. – 27: 25470. – 29: 120. – 30: 228. – 32: 69300. – 33: 1749. – 34: $\binom{6}{3}^2 + 6 \cdot \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{2} \cdot 6^2 + \binom{6}{3} = 2310$. – 40: 2. – 41: 1. – 42: 1. – 45: Resten är 3 om $n \equiv 0 \pmod 3$, 4 om $n \equiv 1 \pmod 3$, och 6 om $n \equiv 2 \pmod 3$. – 47: 30. – 49: [490]. – 58: $(2^{100} - 1)(x - 1)$. – 59: $-x$. – 62: (i) $x^2 - 1 = f(x) - x^2 g(x)$. (ii) $x^2 + x + 1 = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2}(x+1)g(x)$. (iii) $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 g(x) - \frac{1}{2}(x-1)f(x)$. – (iv) $1 = (x+1)(x^3+x^2+2x+1) - (x^2+2x)(x^2+x+1)$. – 63: x^2+x+1. – 64: (i) $(x-2)(x^4-2x^2+8x+1)$. (ii) $x(x+1)(x^2 - x + 1)$. (iii) irreducibelt. – (v) Alla element i $\mathbb{Z}_p$ är nollställen. – 66: $\frac{1}{2}, -2, \pm\sqrt{2}\,i$. – 67: -2, -3, 1/2 och 1/3. – 69: $1 \pm \sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}(\pm 1/\sqrt{2} \pm i/\sqrt{2}$ resp. $\pm i$, $1 \pm \sqrt{2}$. – 70: $x^4 - 14x^2 + 9$.