MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Linjär algebra 1
VT 2004

Räkneövning 2

1. Definiera en följd av matriser $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ genom rekursionsformeln $A_{n+1} = A_n^2 - nB$ där

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Gissa en formel för A_n (som funktion av n) och visa att gissningen är riktig med hjälp av induktion.

2. Antag att A är en 3×3-matris och att matrisen A^2 avbildar tre lineärt oberoende vektorer u, v, w på lineärt oberoende vektorer u', v', w'. Visa att de två systemen (u, v, w) och (u', v', w') har samma orientering.

3. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en ON-bas i $\mathbf{R}^3$. Beräkna följande vektorprodukter (varje produkt innehåller 60 faktorer):

$$v_1 = ((\ldots(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3) \times \cdots \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3)$$

$$v_2 = ((\ldots(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2) \times \cdots \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_2)$$

$$v_3 = ((\ldots(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2) \times \cdots \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2)$$

4. För vilka x har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 3 & 3-x \end{pmatrix}$$

   en invers?

5. Låt A, B, C, och D vara godtyckliga punkter i planet. Bevisa att

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0.$$

6. Två av de tre linjerna L_1, L_2 och L_3, givna på parameterform av $(x, y, z) = (2+t, 1-t, 3+2t)$, $(x, y, x) = (-1, 4, -2) + t(2, 0, 1)$, respektive $x = 6 + t \wedge y = 6 + 2t \wedge z = 4 + 3t$, skär varandra. *Läs igenom ovanstående, och övertyga dig om att du förstår meningen!* Bestäm denna skärningspunkt, och beräkna dess avstånd till planet $3x - 4y + 12z + 2 = 0$.

7. Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ ("normalform") ekvationen för det plan, som innehåller punkten $(1, 0, 2)$ och linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(1, 3, -1)$.

8. Bestäm ekvationen (i normalform) för ett plan som är parallellt med planet

$$2x + 3y + z - 10 = 0$$

och innehåller skärningspunkten mellan linjerna

$$\begin{cases} x &= 6 + 2t \\ y &= 5 - t \\ z &= -1 + 3t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x &= 1 - s \\ y &= 9 + s \\ z &= -1 + s \end{cases} .$$

/(Martin Tamm HT03); Jörgen Backelin VT04