MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Linjär algebra 1
VT 2004

## Räkneövning 1

1. Visa genom induktion att för alla $n \geq 0$ gäller $\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$.

2. Bevisa att $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < (\frac{n}{2})^{n-1}$ för $n = 3, 4, 5, \ldots$.

3. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} a_1 &= 4 \\ a_n &= 2a_{n-1} - n + 1, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

   Visa att $a_n = 2^n + n + 1$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

4. Bestäm koefficienten för $a^5$ i utvecklingen av $\left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^{11}$. Svaret skall ges i uträknad form.

5. Undersök för alla värden på $a$ och $b$ huruvida ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + bz = 3 \\ x + y + az = 2 \\ ax + ay = b \end{cases}$$

   har precis en lösning, ingen lösning alls eller oändligt många lösningar.

6. Lös för varje värde på $a$ ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 1 \\ 6x + (-14)y + (6a+2)z = -6 \\ 2ax + 3y + z = 2a+3 \\ (4a-1)x + (14-6a)y + (-10a-5)z = 4a+14 \end{cases}$$

   Ange speciellt för vilka värden på $a$ som systemet har ingen, en eller flera lösningar.

7. Låt $A$ och $B$ vara symmetriska matriser och antag dessutom att $A$ är inverterbar. Avgör för var och en av matriserna $AB$, $AB - BA$ och $A^{-1}$ huruvida den måste vara symmetrisk.

8. Finns det någon $2 \times 2$ matris $X$ som uppfyller ekvationerna $X^2 = E$ och $(X + E)^7 = X$?

/(Martin Tamm 031105); Jörgen Backelin 040402