

Uppgifter till lektionsomgång 4.

1. $\mathfrak{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ är en bas för ett plan, och \mathbf{f}_1 och \mathbf{f}_2 är två vektorer i planet, som uppfyller att $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ och att $\mathbf{e}_1 = 8\mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2$. Visa att $\mathfrak{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ också är en bas för planet, och ange basbytet på matrisform. Du skall alltså bestämma två matriser A och B som uppfyller att $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}A$ och $\mathfrak{e} = \mathfrak{f}B$.
2. Vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{v} har koordinaterna $(2, 3, 1)$ respektive $(3, 1, -2)$ med avseende på en ON-bas \mathfrak{e} . Beräkna längderna av \mathbf{u} och \mathbf{v} , och räkna också ut $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Kan du använda detta för att bestämma vinkeln θ mellan \mathbf{u} och \mathbf{v} ?
Ledning: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$.
3. En viss bas $\mathfrak{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ i planet uppfyller följande:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2; \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -5; \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 3.$$

Vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{v} har koordinaterna $(2, 1)$ respektive $(1, -2)$ med avseende på basen \mathfrak{e} .

Är basen \mathfrak{e} en ON-bas eller inte? (Motivera ditt svar.)

Är \mathbf{u} och \mathbf{v} ortogonala mot varandra eller inte? (Motivera ditt svar.)

Beräkna $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

4. Låt $\mathfrak{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en ON-bas för rummet, och antag att vektorerna \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 och \mathbf{v}_3 har koordinaterna $(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{-4}{13})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ respektive $(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Visa att alla tre vektorerna är "normerade", d. v. s. av enhetslängd, men att bara två av dem är ortogonala mot varandra. Vilka? Undersök om vinklarna mot den tredje vektorn är spetsiga eller trubbiga. Avgör slutligen huruvida $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ utgör en ON-bas för rummet eller inte. (Motivera ditt svar *mycket* kortfattat.)
5. Ge ett exempel på tre vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} , som är sådana att $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \neq \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.
6. Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$ och $(0, 3, 4)$. (Punkternas koordinater är givna med avseende på ett ON-system.)