Uppgifter till lektionsomgång 2.

1. Följden $a_0, a_1, a_2, \dots$ ges rekursivt av
$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} - 3, \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Använd denna definition för att beräkna a_n för $n \leq 5$ (och om du behöver, några värden till). Använd sedan dessa värden för att gissa ett uttryck på sluten form för a_n. Visa slutligen medelst induktion att din gissning stämmer för alla $n \in \mathbb{N}$.

2. Vad är z^4-termen i utvecklingen av uttrycket $\left(\frac{9z^5}{8} - \frac{2}{3z^2}\right)^{12}$?

3. Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases} y_1 & +2y_2 & +y_3 & +3y_4 & = & 10 \\ 2y_1 & +5y_2 & +3y_3 & +y_4 & = & 9 \\ 3y_1 & +7y_2 & +5y_3 & +4y_4 & = & 21 \\ 2y_1 & -y_2 & & +5y_4 & = & 7 \end{cases}$.

Anmärkning: Som vanligt betyder "lös" detsamma som "lös fullständigt" eller "finn alla lösningar till" (men grundmängden är $\mathbb{R}$, där ej annat anges).

4. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ 3x & +ay & +6z & = & 3 \\ 2x & +y & +(a+3)z & = & 1 \end{cases} .$$

5. Antag att $\begin{cases} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_3 \\ x_4 & = & \lambda_4 \\ x_5 & = & \lambda_5 \end{cases}$ är en lösning till systemet
$$\begin{cases} 23x_1 & + & 16x_2 & - & 39x_3 & & & + & \pi x_5 & = & 2 \\ \sqrt{17}x_1 & + & 0{,}01x_2 & + & 12x_3 & - & 2e^7x_4 & & & = & 1 \\ 117x_1 & - & 56x_2 & - & (\ln 64)x_3 & - & 7x_4 & + & 28x_5 & = & 3 \end{cases} .$$
Beräkna i så fall matrisprodukten $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5) \begin{pmatrix} 23 & 117 & \sqrt{17} \\ 16 & -56 & 0{,}01 \\ -39 & -6\ln 2 & 12 \\ 0 & -7 & -2e^7 \\ \pi & 28 & 0 \end{pmatrix}$.
Ledning: Om du känner dig **väldigt** undersysselsatt, så kan du börja med att lösa ekvationssystemet. Annars kan det löna sig att försöka hitta en betydligt enklare lösning.

6. Vi definierar *spåret* av en 2×2-matris $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ som diagonalsumman $a_{11} + a_{22}$. Visa att om spåret för en 2×2-matris B är 0, så är $B^2 = \mu E$ för något tal μ (där $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, som vanligt).