MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Extra övningar till kursen Linjär algebra 1

1. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

2. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+5) = \frac{n}{6}(2n+7)(n+7)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

3. Visa att $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

4. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

5. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + 2 + \ldots + k} = \frac{2n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

6. Visa att $2^n > n^3$ för alla heltal $n \geq 10$.

7. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

8. Visa att $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$.

9. Antag att $a_0 = 1$ och att $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Gissa en formel för a_n som gäller för alla $n \in \mathbf{N}$ och visa sedan att gissningen är riktig.

10. Antag att $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ och att $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Gissa en formel för a_n som gäller för alla $n \in \mathbf{Z}_+$ och visa sedan att gissningen är riktig.

11. Antag att $a_1 = 2$ och att $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$. Visa att $a_n < 3$ och att $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \in \mathbf{Z}_+$. Åskådliggör också talföljden grafiskt på sedvanligt sätt.

12. Antag att $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Visa att det finns tal α och β sådana att $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ för alla $n \in \mathbf{N}$. Vilka är dessa tal α och β?

13. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & ay & - & z & = & 1 \\ ax & + & 2y & + & (a+3)z & = & 2 \end{array} \right. .$$

14. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a^2 \end{cases} .$$

15. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ a^2x + (2a+4)y - (3a+6)z = 3a+6 \\ x + ay - 3z = 5-a \end{cases} .$$

16. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + az = 2 \\ x + ay + z = 2 \\ x + az = 1 \end{cases} .$$

17. Bestäm för varje värde på konstanten a alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ 2x + ay + z = 2a \end{cases} .$$

18. Visa med vektorräkning att medianerna i en triangel skär varandra i en punkt, och att den gemensamma skärningspunkten delar medianerna i förhållandet $2:1$ räknat från triangelhörnen.

19. Visa med vektorräkning att bisektrisen till en triangelvinkel delar motstående triangelsida i samma förhållande som förhållandet mellan de båda övriga triangelsidorna

Svar till extra övningar

12. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

13. $a \neq 1$: lösning saknas.
$a = 1$: $(x,y,z) = (2t, 1-3t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.

14. $a \notin \{-2,1\}$: $(x,y,z) = \left(\dfrac{a^2+2a+1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, -\dfrac{a+1}{a+2}\right)$.
$a = -2$: lösning saknas.
$a = 1$: $(x,y,z) = (1-s-t, s, t)$, $s,t \in \mathbf{R}$.

15. $a \notin \{-1,2\}$: $(x,y,z) = \left(0, -1, -\dfrac{5}{3}\right)$.
$a = -1$: $(x,y,z) = (5+3t, -1, t)$, $t \in \mathbf{R}$.
$a = 2$: $(x,y,z) = (3-2s+3t, s, t)$, $s,t \in \mathbf{R}$.

16. $a \notin \{-1,1\}$: $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{a+1}, \dfrac{2}{a+2}, \dfrac{1}{a+1}\right)$.
$a = -1$: lösning saknas.
$a = 1$: $(x,y,z) = (1-t, 1, t)$, $t \in \mathbf{R}$.

17. $a \notin \{-3,1\}$: $(x,y,z) = \left(\dfrac{2a}{a+3}, \dfrac{3a+3}{a+3}, -\dfrac{a^2+a}{a+3}\right)$.
$a = -3$: lösning saknas.
$a = 1$: $(x,y,z) = (1+t, -3t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.