Lösningar till tentamensskrivning i Linjär algebra 1, gk, 2004-05-18

1. Om man delar upp vilken som helst vektor från någon punkt på linjen till den givna punkten $(1,3,3)$ i en komposant längs med linjen och en som är vinkelrät mot linjen, så är det sökta avståndet längden av den vinkelräta komposanten mot linjen.p Vi komposantuppdelar därför t. ex. vektorn $\mathbf{v} = (1,3,3) - (1,0,0) = (0,3,3)$.
$\mathbf{u} = (5,2,4) - (1,0,0) = (4,2,4)$ är en riktningsvektor för den räta linjen genom punkterna $(1,0,0)$ och $(5,2,4)$. Eftersom $|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$, är $\mathbf{r} = \frac{1}{6}\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2,1,2)$ en normerad riktningsvektor (d. v. s. $|\mathbf{r}| = 1$). $\mathbf{v}$-komposanten längs linjen är då detsamma som projektionen av $\mathbf{v}$ på linjen, d. v. s. $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} = \frac{1}{3}(0\cdot 2 + 3\cdot 1 + 3\cdot 2)\frac{1}{3}(2,1,2) = (2,1,2)$ Då är den vinkelräta komposanten $\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} = (0,3,3) - (2,1,2) = (-2,2,1)$, och alltså det sökta avståndet $|(-2,2,1)| = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = \underline{3}$.

2. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$, så matrisen har inversen
$$\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & -3 & 10 \\ 7 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

3. Det finns oändligt många olika rätta svar till denna uppgift. **Ett** exempel är $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (I just detta fall blir $BA = A \neq 0$, och förstås $AB = 0$.)

4. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 2a+3 & 6+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & a-6 & 0 \\ 0 & -1 & 2a-6 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2a-9 & 2 \\ 0 & 1 & 6-a & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right).$$ om $a \neq 0$ så kan vi fortsätta genom att dividera tredje raden med a, vilket ger
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2a-9 & 2 \\ 0 & 1 & 6-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{a} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9b}{a}+2-2b \\ 0 & 1 & 0 & b-\frac{6b}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{a} \end{array}\right).$$ Om däremot $a = 0$ så får vi att tredje ekvationen blir $0 = b$, vilket saknar lösning för $b \neq 0$.F Till sist så får vi, för $a = b = 0$,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Alltså får vi den unika lösningen $\begin{cases} x = \frac{1}{a}(2a+9b-2ab) \\ y = \frac{1}{a}(ab-6b) \\ z = \frac{b}{a} \end{cases}$ om $a \neq 0$;
lösningarna $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = -6t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, om $a = b = 0$, och ingen lösning alls om $a = 0$ men $b \neq 0$.

$(V.G.V.)$

5. Sätter man in A respektive B i planets ekvations vänsterled, så får man $2 \cdot 4 + 3 - 7 = 4$ respektive $2 \cdot 10 + 7 - 9 = 18$. Eftersom båda värdena har samma tecken (både 4 och 18 är ju positiva tal), så ligger A och B på samma sida om planet. Detta är de enda räkningar man behöver göra för att lösa uppgiften; resten är tänkande!
Av symmetriskäl måste vinkeln mellan vektorerna $\overline{A'A}$ och $\overline{AB}$ vara densamma som mellan $\overline{AA'}$ och $\overline{A'B'}$, d. v. s. θ. Vi skall alltså beräkna summan av vinkeln mellan $\overline{A'A}$ och $\overline{AB}$, plus vinkeln mellan $\overline{AB}$ och $\overline{BB'}$. Eftersom $\overline{A'A}$ och $\overline{BB'}$ båda är normalvektorer till samma plan, men riktade åt olika håll, så måste alla tre vektorerna $\overline{A'A}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{AB}$ vara komplana, och den sökta vinkeln måste vara vinkeln mellan $\overline{A'A}$ och $\overline{BB'}$. Svar: <u>Den sökta vinkeln är π</u>.

6. a) Avbildningsmatrisen till T är $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Kan t. ex. visas med induktion:
   Bas: För $n = 1$ får vi mycket riktigt $T^2 = T$, eftersom $A^2 = A$.
   Steg: Antag att påståendet är sant för $n = p$, d. v. s. antag att $T^{p+1} = T^p$ (**INDUKTIONSANTAGANDE**). Vi vill visa att påståendet är sant för $n = p + 1$, d. v. s. att $T^{p+2} = T^{p+1}$. V.L. $= T^{p+2} = T^{p+1} \circ T = T^p \circ T = T^{p+1} =$ H.L.
   Enligt induktionsprincipen gäller alltså påståendet för talen $n = 1, 2, 3, \ldots$, d. v. s. för alla $n \in \mathbb{Z}_+$
   Slutsatsen är ganska enkel, och man kan också resonera på andra sätt som inte explicit använder induktion.