MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Avd. Matematik
Examinator: Jörgen Backelin

Tentamensskrivning i
Linjär algebra 1, gk, 5 poäng
tisdagen den 18 maj 2004

Inga hjälpmedel utöver vanliga skrivverktyg.

1. Bestäm (kortaste) avståndet från punkten $(1, 3, 3)$ till den räta linjen genom punkterna $(1, 0, 0)$ och $(5, 2, 4)$. Koordinatsystemet är ett ON-system. 4 p

2. Avgör om matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
har invers, och beräkna inversen om den existerar. 4 p

3. Ange två stycken 2×2–matriser med egenskaperna att $AB = 0$ men $BA \neq 0$. (Matriserna skall vara explicita, d. v. s. du skall skriva upp dem med riktiga konkreta tal som element (poster).) 3 p

4. Lös för varje reellt tal a och varje reellt tal b ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + az = 4 \\ 3x + 5y + (2a+3)z = 6 + b \end{cases}$$
4 p

5. Planet Π ges av ekvationen $2x + y - z = 0$, och punkterna A och B har koordinaterna $(4, 3, 7)$ respektive $(10, 7, 9)$, med avseende på en ON-bas. A' är spegelbilden till A och B' är spegelbilden till B, vid spegling (reflektion) i Π. θ är vinkeln mellan vektorerna $\overline{AA'}$ och $\overline{A'B'}$, och ϕ är vinkeln mellan $\overline{AB}$ och $\overline{BB'}$. Beräkna $\theta + \phi$.
Ledning: Svettas inte mer än nödvändigt! Tänk igenom geometrien i situationen, innan du (eventuellt) börjar räkna! 4 p

6. Låt T vara den lineära avbildning av planet på sig själv, där man får $T(\mathbf{v})$ från vektorn $\mathbf{v}$ genom att först projicera vektorn $2\mathbf{v}$ vinkelrätt på x-axeln, och sedan vrida resultatet vinkeln $\frac{\pi}{3}$ i positiv led.

   a) Bestäm avbildningsmatrisen till T. (Positivt orienterat ON-system.) 3 p

   b) Visa att $T^{n+1} = T^n$ för alla positiva naturliga tal n. 2 p

Återlämning måndagen 24 maj 14^{30}–15^{00} *i sal 15; därefter hos Tom Wollecki på vanlig kontorstid.*

12 poäng (ink. ev. bonuspoäng förvärvade under vårterminen 2004) garanterar godkänt.