**Lösningar till tentamensskrivning i Linjär algebra 2,fk MA 2070, 5p 2005-10-26**

*Korrigerad 2006–03–16*

1. Fullständig Gausselimination ger:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -13 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 37 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -62 & -13 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 37 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{13}{62} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & \frac{77}{62} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -\frac{17}{62} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{13}{62} \end{pmatrix} = B\,.$$

$B$ innehåller tre ledande ettor (här markerade med **fetstil**), i kolonnerna 1, 2 och 4. Kolonnerna på samma platser i $A$, d. v. s. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, utgör en bas för kolonrummet till $A$.
Matriserna $A$ och $B$ har samma radrum, och alltså samma baser; och en bas för radrummet till $B$ utgörs av ickenollraderna i $B$, vilklet i detta fall är alla raderna i $B$. Alltså är $\big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{77}{62} \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{17}{62} \end{pmatrix} \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{13}{62} \end{pmatrix}\big)$ också en bas för radrummet till $A$.
Slutligen är återsående kolonner i $B$, d. v. s. kolonnerna 3 och 5, parameterkolonner. Om jag väljer parametrarna $x_3 = s$ och $x_5 = 62t$ (för att slippa bråk), så ger detta lösningarna

$$\begin{cases} x_1 &= -2s - 77t \\ x_2 &= s + 17t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= -13t \\ x_5 &= 62t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})\,.$$

Genom att identifiera $s$- respektive $t$-koefficienter, får jag ut en bas för lösningsrummet till det homogena ekvationssystemet $AX = 0$, vilket ju också är en bas för nollrummet till $F$, nämligen $\{(-2, 1, 1, 0, 0),\ (-77, 17, 0, -13, 62)\}$.

*Anmärkning: Jag påminner om att baser kan anges på många olika goda sätt, vilket jag gett exemplel på ovan. Det finns också (oftast) oändligt många olika baser för ett rum, och alltså oändligt många olika korrekta svar på uppgiften. Till exempel är i just det här fallet standardbasen i* $\mathbb{R}^3$ *också en bas för* kolrum($A$), *och de tre raderna i* $A$ *bildar en bas för* radrum($A$).

2. Om vi drar första raden från den andra, och två gånger första raden från den tredje, och expanderar längs andra raden två gånger, så får vi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 6 & 10 \\ e & \sqrt{2} & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & \sqrt{2} & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

(*V.G.V.*)

och med liknande metoder eller Sarrus regler visar man lätt att $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -10$. Alltså får vi svaret: Determinanten är $3 \cdot (-10) = \underline{-30}$.

3. För att bestämma avbildningsmatrisen, bör vi bestämma $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$ (eftersom koordinaterna för dessa ger respektive kolonner i avbildningsmatrisen). Detta kan göras på många goda sätt. Ett är att Gausseliminera en augmenterad matris:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

På detta eller något annat vis konstaterar man att $F(\mathbf{e}_1) = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ och $F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$. Svar: Den sökta avbildningsmatrisen är $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sfärens ekvation är ju invariant (ändras inte) under ON-basbyten, så vi söker först ett uttryck utan blandade termer för den kvadratiska formen, medelst ett ON-basbyte. Formen motsvarar den symmetriska matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$
vilket ger sekularekvationen $0 = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 17\lambda$, med lösningarna $\lambda = 0 \vee \lambda = \frac{11 \pm \sqrt{53}}{2}$. Efter basbyte får vi alltså formen $\frac{11+\sqrt{53}}{2}(y')^2 + \frac{11-\sqrt{53}}{2}(z')^2$, under bivillkoret $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$. Vidare är ju $\sqrt{53} < \sqrt{121} = 11$, så $0 < \frac{11-\sqrt{53}}{2} < \frac{11+\sqrt{53}}{2}$.
Svar: Det minsta värdet är 0, och det största värdet är $\frac{11+\sqrt{53}}{2}$.
*Kommentar:* De punkter där minimum och maximum antas efterfrågades inte, och behöver alltså inte beräknas. Man bör läsa texten till **den aktuella** uppgiften noggrant; inte förlita sig på minnet av hur **andra** likartade uppgifter har lösts!

5. a) Om $f, g, h \in V$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, så gäller: $(g|f) = \int_0^2 g(x)f(x)e^x\,dx = \int_0^2 f(x)g(x)e^x\,dx = (f|g)$; $(f+g|h) = \int_0^2 \big(f(x)+g(x)\big)h(x)e^x\,dx = \int_0^2 f(x)h(x)e^x\,dx + \int_0^2 g(x)h(x)e^x\,dx = (f|h) + (g|h)$; och $(\lambda f|g) = \int_0^2 \lambda f(x)g(x)e^x\,dx = \lambda \int_0^2 f(x)g(x)e^x\,dx = \lambda(f|g)$. Vidare är $(f|f) = \int_0^2 f(x)^2 e^x\,dx$. Eftersom $f(x)^2 \geq 0$ och $e^x > 0$ för varje $x$ i intervallet, så är integranden och alltså även integralen ickenegativ, d. v. s. $(f|f) \geq 0$. Om $f$ är nollvektorn i $V$, vilket ju i detta fall betyder funktionen som är konstant 0, så är integranden $f(x)^2e^x$ också konstant 0, och alltså $(f|f) = 0$. Slutligen, om $f \in V$ men $f$ **inte** är konstant 0, så finns något $a \in [0,2]$ med $f(a) \neq 0$. Då är $f(a)^2e^a > 0$, och eftersom integranden är kontinuerlig, så gäller detta också i ett område runt $a$ (eller vid $a$, om händelsevis $a = 0$ eller $a = 1$); vilket medför att $(f|f) > 0$.

(*V.G.V.*)

b) Vi söker alltså ett $h \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, sådant att $(h|f) = 0$, om $f(x) = e^{-x}$. Då är ju helt enkelt $0 = \int_0^2 h(x)e^{-x}e^x\,dx = \int_0^2 h(x)\,dx$; och det är ganska lätt att finna kontinuerliga funktioner som uppfyller detta. Ett svar bland många är $\underline{h(x) = x - 1}$

6. a) (Se läroboken, kapitel 11.)

b) Som Erik Svensson påpekat, så bör man också förutsätta $M \neq \emptyset$. (Varför?)
Nollavbildningen, alltså den funktion som avbildar alla element i $V$ på 0, avbildar $M$ på $\{0\}$, och ligger alltså i $W$ (som alltså inte är tomt).
Om $F, G \in W$ och $\mathbf{v} \in M$, så är $(F+G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v}) = 0 + 0 = 0$, så $F + G$ avbildar varje $\mathbf{v} \in M$ på 0, och är alltså ett element i $W$.
Om dessutom $\lambda \in \mathbb{R}$, så är $(\lambda F)(\mathbf{v}) = \lambda \cdot 0 = 0$, så $(\lambda F)(M) = \{0\}$, så $\lambda F \in W$.

c) Ett element $F \in (R^3)^*$ är ju en lineär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$; och varje sådan ges av multiplikation med en $1 \times 3$-matris (som samtidigt är avbildningsmatrisen med avseende på standardbasen). Låt avbildningmatrisen för $F$ vara $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. Eftersom $a+b = F\big((1,1,0)\big) = 0$ och $2a + 5b = F\big((2,5,0)\big) = 0$, måste $a = b = 0$; men $c$ kan vara vilket reellt tal som helst. Alltså är $W$ ettdimensionellt, och en bas är $\{E_3\}$, där $E_3$ är den lineära avbildning som representeras av $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.