Rangsatsen och dimensionssatsen.

Både rangsatsen och dimensionssatsen handlar om samband mellan dimensionerna för vissa ändligtdimensionella vektorrum. Vi vill förstås bevisa att satserna gäller även om dimensionerna är så stora att vi har svårt att föreställa oss rummen intuitivt. Vi tar därför fasta på vektorrumsdimensionens grundläggande algebraiska egenskap, att dimensionen för ett rum är detsamma som antalet element i en bas för rummet. Vi bevisar båda satserna på en gång, genom att konstruera baser för de inblandade rummen med hjälp av Gausselimination och räkna fram basernas storlekar.

Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ vara en matris av typ $m \times n$. Låt $A_1, \dots, A_m$ beteckna raderna i A (d. v. s. $A_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}) \in M_{1\times n}$ o. s. v.), och låt $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in M_{m\times 1}$ beteckna kolonnerna i A. Med radrummet till A, radrum (A), menar vi lineära höljet av raderna i A, d. v. s. $\text{radrum}\,(A) = [A_1, \dots, A_m]$. Analogt definieras kolonnrummet till A genom $\text{kolrum}\,(A) = [A^{(1)}, \dots, A^{(n)}]$. Rangsatsen säger nu att radrummet och kolonnrummet har samma dimension:

Sats 1. *Låt A vara en $m \times n$–matris. Då är* $\dim \text{radrum}\,(A) = \dim \text{kolrum}\,(A)$.

Denna dimension kallas **rangen** av A.

A definierar också en lineär avbildning f_A från $M_{n\times 1}$ till $M_{m\times 1}$ (eller från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, om vi tolkar elementen i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ som kolonnmatriser), genom $f_A(X) = AX$. Värderummet för denna avbildning (vilket också kallas värderummet för matrisen A) är

$$V(f_A) = V(A) = \{AX | X \in M_{n\times 1}\} = \{\sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)}\} = [A^{(1)}, \dots, A^{(n)}] = \text{kolrum}\,(A)\,,$$

d. v. s. värderummet för A är detsamma som kolrum (A).

Nollrummet till A (också kallat nollrummet eller kärnan till f_A) är

$$N(A) = \{X \in M_{n\times 1} \mid AX = 0\}\,,$$

d. v. s. rummet av lösningar till det homogena ekvationssystemet $AX = 0$. Dimensionssatsen säger i denna situation:

Sats 2. *Låt A vara en $m \times n$–matris. Då är* $\dim N(A) + \dim V(A) = n$.

För att bevisa de två satserna visar vi hur man kan konstruera baser för de tre rummen radrum (A), $N(A)$ och kolrum $(A) = V(A)$:

Utför Gausselimination på A. Detta innebär att man antingen byter plats på två rader eller multiplicerar en rad med en konstant eller lägger en multipel av en rad till en annan rad tills matrisen är på "trappstegsform". Vi får då till slut en $m \times n$–matris $B = (b_{ij})$, med rader $B_1, \dots, B_m$ och kolonner $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$, och med följande egenskaper:

(*i*) $BX = 0 \iff AX = 0$, d. v. s. $N(B) = N(A)$.

(*ii*) Raderna i B är lineärkombinationer av raderna i A och vice versa, d. v. s. radrum $(B) =$ radrum (A).

(*iii*) För något tal r mellan 0 och m gäller att $B_1, \ldots, B_r$ är nollskilda men $B_{r+1} = \ldots = B_m = 0$. (Vi har inte uteslutit att $r = 0$ eller $r = m$, d. v. s. att alla rader i B är 0 eller att inga rader i B är 0.)

(*iv*) För varje $i \in \{1, \ldots, r\}$ så finns ett kolonnindex $k_i \in \{1, \ldots, n\}$ sådant att $b_{ij} = 0$ om $j < k_i$ och $b_{i\,k_i} = 1$. ($b_{i\,k_i}$ kallas **den ledande ettan** i rad i.)

(*v*) $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Dessa egenskaper bör vara välbekanta, om man tänker igenom vad de betyder konkret. Egenskaperna (*iii*), (*iv*) och (*v*) är bara ett formellt sätt att notera att B är på trappstegsform. Man bör också känna igen hur man skriver upp lösningarna till systemet $BX = 0$: Varje x_j för j sådant att kolonnen $B^{(j)}$ **inte** innehåller en ledande etta sätter man till en parameter. På det sättet får man $n - r$ parametrar $t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$. Man löser sedan successivt ut de övriga variablerna nedifrån.

Lösningarna kan på vanligt sätt skrivas om på vektorform (eller kolonnform):

$$BX = 0 \iff X = \sum_{j=1}^{n-r} t_j C^{(j)}$$

för vissa $C^{(1)}, \ldots, C^{(n-r)} \in M_{n\times 1}$.

Exempel.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är en 5×9–matris på trappstegsform, $r = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 7$. Variablerna $x_1, x_3, x_4, x_6, x_8, x_9$ sätts till parametrar $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$. Därefter löses x_7 ut med hjälp av den tredje ekvationen och man får $x_7 = -2t_5 - 2t_6$. Sedan löses x_5 ut till $x_5 = -2t_4 + 2t_5 + 2t_6$ och slutligen löses x_2 ut: $x_2 = -2t_2 - 2t_3 + 2t_4 - 2t_5 - 2t_6$. På vektorform blir detta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där kolonnerna i högra ledet är $C^{(1)}, \ldots, C^{(6)}$ med beteckningarna ovan. Man ser lätt att raderna B_1, B_2, B_3 i B är lineärt oberoende, ty om $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0$, så får man att $\lambda_1 = 0$ genom att titta på den andra koordinaten, därefter följer att $\lambda_2 =$

0 med hjälp av den femte koordinaten och slutligen $\lambda_3 = 0$ med hjälp av den sjunde koordinaten. På samma sätt ser man att kolonnerna $B^{(2)}, B^{(5)}, B^{(7)}$ är lineärt oberoende: Om $\lambda_1 B^{(2)} + \lambda_2 B^{(5)} + \lambda_3 B^{(7)} = 0$, så följer i ordning att $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$. På samma sätt ser man också att kolonnerna $C^{(1)}, \ldots, C^{(6)}$ är lineärt oberoende: Om $\lambda_1 C^{(1)} + \lambda_2 C^{(2)} + \ldots + \lambda_6 C^{(6)} = 0$, så följer, genom att titta på första, tredje, fjärde, sjätte, åttonde och nionde koordinaten, att $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 0$.

Allt detta som vi sett i exemplet kan enkelt bevisas generellt:

Lemma 1. *Låt B vara en matris på trappstegsform och låt r, $k_1, \ldots k_r$ och $C^{(1)}, \ldots, C^{(n-r)}$ definieras enligt ovan. Då är följande mängder lineärt oberoende*

(a) $(B_1, \ldots, B_r)$

(b) $(B^{(k_1)}, \ldots, B^{(k_r)})$

(c) $(C^{(1)}, \ldots, C^{(n-r)})$

Bevis. Beviset går till som i exemplet. Formellt kan man använda sig av induktion.

Vi kan nu direkt skriva upp de sökta baserna för de tre rummen radrum (A), $N(A)$ och kolrum $(A) = V(A)$:

Lemma 2. *Låt B vara en trappstegsformad matris som man får genom att utföra radoperationer på matrisen A. Då gäller att*

(a) $(B_1, \ldots, B_r)$ *är en bas för* radrum (A),

(b) $(C^{(1)}, \ldots, C^{(n-r)})$ *är en bas för* $N(A)$, *och*

(c) $(A^{(k_1)}, \ldots, A^{(k_r)})$ *är en bas för* kolrum $(A) = V(A)$.

Bevis.
(a): Enligt egenskap (ii) ovan gäller radrum $(A) =$ radrum $(B) = [B_1, \ldots, B_r]$ (eftersom övriga rader i B är nollrader). Alltså spänner $B_1, \ldots, B_r$ upp radrum (A). Vidare är $B_1, \ldots, B_r$ lineärt oberoende enligt Lemma 1.
(b): $C^{(1)}, \ldots, C^{(n-r)}$ är lineärt oberoende enligt Lemma 1 och spänner upp $N(B)$. Men $N(B) = N(A)$ enligt egenskap (iii) ovan.
(c): (Detta fall är litet krångligare att bevisa än de övriga, därför att i allmänhet ju kolrum $(B) \neq$ kolrum (A).) Enligt Lemma 1 gäller att $B^{(k_1)}, \ldots, B^{(k_r)}$ lineärt oberoende. De är dessutom en bas för kolrum (B): Om $B^{(j)}$ är en av kolonnerna i B, så kan man bestämma $x_1, \ldots, x_r$ så att $x_1 B^{(k_1)} + \ldots + x_r B^{(k_r)} = B^{(j)}$. Först bestäms x_r, därefter bestäms x_{r-1} och så vidare ned till x_1.

Nu gäller att $(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ och $(B^{(1)}, \ldots, B^{(n)})$ har precis samma lineära beroendeförhållanden, därför att

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)} = 0 \iff AX = 0 \iff BX = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} x_j B^{(j)} = 0$$

på grund av egenskap (i) ovan. Alltså är även $A^{(k_1)}, \ldots, A^{(k_r)}$ lineärt oberoende, och dessutom gäller

$$
\begin{aligned}
&y_1B^{(k_1)} + \ldots + y_rB^{(k_r)} = B^{(j)} \implies y_1B^{(k_1)} + \ldots + y_rB^{(k_r)} - B^{(j)} = 0 \\
&\implies y_1A^{(k_1)} + \ldots + y_rA^{(k_r)} - A^{(j)} = 0 \implies y_1A^{(k_1)} + \ldots + y_rA^{(k_r)} = A^{(j)} \\
&\implies A^{(j)} \in [A^{(k_1)}, \ldots, A^{(k_r)}]
\end{aligned}
$$

så att $A^{(k_1)}, \ldots, A^{(k_r)}$ spänner upp kolrum (A) och därmed är $(A^{(k_1)}, \ldots, A^{(k_r)})$ en bas för kolrum (A).

Korollarium. $\dim \text{radrum}\,(A) = r$, $\dim N(A) = n-r$, *och* $\dim \text{kolrum}\,(A) = \dim V(A) = r$, *där* r *är antalet nollskilda rader i trappstegsformen* B *för* A.

Nu följer sats 1 och sats 2 omedelbart: $\dim \text{radrum}\,(A) = r = \dim \text{kolrum}\,(A)$, och $\dim N(A) + \dim V(A) = (n-r) + r = n$.

Observera att dimensionssatsen går att formulera allmännare (som i Tengstrand, kap. 14, sats 16): Om $F : U \to W$ är en lineär avbildning där U är ett ändligtdimensionellt vektorrum, så är $N(F)$ och $V(F)$ ändligtdimensionella, och $\dim N(F) + \dim V(F) = \dim U$. Om man vill så kan man återföra detta på sats 2, genom att först välja en bas $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ för U och notera att även $V(F)$ måste vara ändligtdimensionellt eftersom det spänns upp av $F(\mathbf{e}_1), \ldots, F(\mathbf{e}_n)$, sedan välja en bas för $V(F)$, och till sist tillämpa sats 2 för avbildningsmatrisen till $F : U \to V(F)$.

Två påpekanden om metodens tillämpning:

I vissa fall kan det hända att när man räknar fram en bas med denna metod så får man en tom mängd. Det inträffar dels för rad- och kolonnrumsbaserna till nollmatrisen ($r = 0$), och dels för lösningsrummet för matriser A som bara har den triviala lösningen till ekvationen $AX = 0$ ($r = n$). Till exempel är en nollmatris ju redan på trappstegsform, men har ingen rad eller kolonn med ledande etta. Man skall tolka detta som att man har en ”tom bas”, alltså en bas med noll element, för ett vektorrum av dimension 0.

Varje ”vanligt” ändligtdimensionellt vektorrum (med dimension ≥ 1) har oändligt många olika baser. Detta kan vara ett problem, om man vill kontrollera sina räkningar i ett 'facit'. Säg att du arbetat med en matris A av typen 4×5, och fått fram att rangen är 3 och alltså att dimensionen för $N(A)$ är 2, och fått fram baser för radrummet, kolonnrummet och nollrummet. När du tittar i facit ser du samma uppgifter om rangen och lösningsrumsdimensionen, men inte samma baser. Din bas för kolonnrummet består av kolonnerna $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ och $A^{(5)}$; men i facit står det tre helt andra kolonner, som inte ens finns med i A. Det betyder inte säkert att vare sig du eller facit har fel; ni kanske bara har hittat två olika baser för samma rum. (Den som skrev facit kanske bara råkade använda en annan metod för att lösa uppgiften.) Om det är så, så kan dina basvektorer kan skrivas som lineärkombinationer av facits basvektorer, och vice versa. Du kan alltså ändå använda facit för att kontrollera ditt svar.

Kom dessutom ihåg, att även om ett vektorrum har olika baser, så har varje bas samma antal basvektorer! Har du t. ex. två basvektorer men facit tre basvektorer i påstådda baser för samma vektorrum, så måste minst en av er ha fel.

Jörgen Backelin och Clas Löfwall, mars 2002
Senast reviderad: augusti 2005