MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik

Linjär algebra 2, fk
HT 01

Rad- och kolonnrum. Inverterbara matriser.

Låt oss börja med att gå igenom några allmänna fakta om linjärt beroende och baser, som man ofta använder utan motivering.

0. *Om* $V = \{\bar{0}\}$, så gäller att $\dim(V) = 0$.

Vi säger per definition att den tomma mängden är en bas för V, dvs den tomma mängden säges spänna $\{\bar{0}\}$ och den tomma mängden är linjärt oberoende. Observera att $\bar{0}$ är linjärt beroende (ty $1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$).

1. *Om* $V = [v_1, \ldots, v_n]$ *så finns en bas för* V*, vars element utgör en delmängd av* $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Detta motiveras före Definition 3 i boken och påpekas också före Sats 3.

2. *Om* $V = [v_1, \ldots, v_n]$ *och* $\dim(V) = n$*, så är* $(v_1, \ldots, v_n)$ *en bas för* V.

Detta är sant, ty enligt 1. finns en delmängd av $\{v_1, \ldots, v_n\}$ som är en bas, men enligt Sats 2 kan denna delmängd inte vara en äkta delmängd.

3. *Om* $(v_1, \ldots, v_n)$ *är linjärt oberoende vektorer i* V *och* $\dim(V) = n$*, så är* $(v_1, \ldots, v_n)$ *en bas för* V.

Enligt Sats 3 kan $(v_1, \ldots, v_n)$ utvidgas till en bas för V, men återigen enligt Sats 2 så kan denna utvidgning inte vara äkta.

4. *Om* U *är ett delrum till* V*, så gäller* $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Detta följer direkt av Sats 3 om U ovh V är ändligtdimensionella. Påståendet är trivialt om $\dim(V) = \infty$. Antag att $\dim(V) = n < \infty$. Vi skall visa att även $\dim(U) < \infty$. Om $U = \{\bar{0}\}$, så gäller $\dim(U) = 0 < \infty$. Antag att $U \neq \{\bar{0}\}$. Tag en vektor $u_1 \neq \bar{0}$ i U. Om $U = [u_1]$, så gäller $\dim(U) = 1 < \infty$. Antag att $U \neq [u_1]$. Tag $u_2 \in U$ så att $u_2 \notin [u_1]$. Om $U = [u_1, u_2]$, så gäller $\dim(U) = 2 < \infty$, annars finns $u_3 \in U$ så att $u_3 \notin [u_1, u_2]$. Den här processen måste ta slut efter högst n steg, eftersom $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ är en linjärt oberoende delmängd av V, som alltså har högst n element enligt Sats 1.

5. *Om* U *är ett delrum till* V *och* $\dim(U) = \dim(V) < \infty$*, så gäller* $U = V$.

Tag en bas för U. Den utgör en linjärt oberoende mängd i V och kan alltså utvidgas till en bas för V enligt Sats 3. Eftersom dimensionerna är lika, så kan denna utvidgning inte vara äkta. Alltså är den givna basen för U också en bas för V och därmed gäller $U = V$.

6. *Om för någon vektor* v*,* $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ *för precis en* n*–tippel* $(x_1, \ldots, x_n)$ *så gäller att* $(v_1, \ldots, v_n)$ *är linjärt oberoende.*

Antag att det finns $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, inte alla $= 0$, så att $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \bar{0}$. Då gäller att även $v = (x_1 + \lambda_1)v_1 + \ldots + (x_n + \lambda_n)v_n$ och $(x_1, \ldots x_n) \neq (x_1 + \lambda_1, \ldots, x_n + \lambda_n)$, vilket motsäger antagandet.

Låt nu $A = [a_{ik}]_{m\times n}$ vara en $m \times n$–matris. Varje rad i A är alltså en n–tippel, dvs en vektor i R^n och varje kolonn i A är en m–tippel, dvs en vektor i R^m. En vektor i R^n kan vi alltså uppfatta antingen som en radmatris, dvs en $1 \times n$–matris, eller som en kolonnmatris, dvs en $n \times 1$–matris. En nollmatris av godtycklig ordning betecknar vi med 0.

Raderna i A spänner upp ett delrum av R^n, som vi kallar för *radrummet* till A och betecknar radrum$\,(A)$. På motsvarande sätt definierar vi *kolonnrummet* till A, kolrum$\,(A)$, som det delrum av R^m som spänns upp av kolonnerna i A. Lösningarna till det homogena linjära ekvationssystemet $AX = 0$ (där X är en kolonnmatris) utgör ett delrum av R^n (se Exempel 1, kapitel 11 i boken) och vi kallar detta *nollrummet* till A och betecknar det $\mathrm{N}(A)$.

Ibland kan det vara praktiskt att ha mer komprimerade beteckningar för raderna, så vi sätter $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$, dvs A_i får beteckna rad i. Analogt låter vi $A^{(k)}$ beteckna kolonn k i A, dvs $A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$. Vi har alltså radrum$\,(A) = [A_1, A_2, \ldots, A_m]$ och kolrum$\,(A) = [A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}]$. Dimensionen av radrummet kallas *radrangen* för A (radrang(A)) och dimensionen av kolonnrummet kallas *kolonnrangen* för A (kolrang(A)). Enligt påstående 4. ovan har vi radrang$(A) \leq n$, eftersom radrum$\,(A) \subseteq R^n$, men vi har också (enligt påstående 1.) radrang$(A) \leq m$, eftersom radrum$\,(A)$ spänns upp av m stycken vektorer. På samma sätt ser man att kolrang$(A) \leq m$ och kolrang$(A) \leq n$. Senare skall vi visa det märkliga resultatet att radrang och kolonnrang alltid är lika och kalla detta tal kort och gott för rangen för A.

Låt nu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vara en kolonnmatris. Observera att $AX = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)}$, dvs AX är den linjärkombination av kolonnerna i A som ges av koefficienterna $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kolonnrummet $[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}]$ är alltså mängden av alla vektorer i R^m som kan skrivas AX där vi låter X variera, dvs alla vektorer B, där B är en $m \times 1$–matris, så att ekvationssystemet $AX = B$ har någon lösning.

Att kolonnerna är linjärt oberoende är ekvivalent med att implikationen $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ gäller, dvs att det homogena systemet $AX = 0$ bara har den triviala lösningen. Multiplikation till höger med en kolonnmatris resulterar alltså i en linjärkombination av kolonnerna. Analogt ger multiplikation till vänster med en radmatris $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix}$ en linjärkombination av raderna: $YA = y_1 A_1 + y_2 A_2 + \cdots + y_m A_m$, så att radrum$\,(A)$ är mängden av alla YA där Y varierar över alla $1 \times m$–radmatriser. Raderna i A är linjärt oberoende om och endast om implikationen $YA = 0 \Rightarrow Y = 0$ gäller. Naturligtvis gäller också att radrum$\,(A) =$ kolrum$\,(A^t)$.

Låt oss nu tillämpa påståendena 1.– 6. ovan på fallet att vektorerna är kolonnerna (eller raderna) i en matris. Påstående 1. ger att man alltid kan välja en delmängd av kolonnerna som en bas för kolrum$\,(A)$ (och analogt för radrummet), men det finns naturligtvis även andra baser. Påstående 2. ger t.ex. att om en kvadratisk $n \times n$–matris uppfyller att kolonnrummet $= R^n$, så gäller att kolonnerna är linjärt oberoende och utgör en bas för R^n. Eftersom kolonnrummet består av alla högerled för vilket ekvationssystemet har en lösning, så kan vi också formulera detta så här: Om ett kvadratiskt ekvationssystem har *någon* lösning för *varje* högerled, så gäller att det homogena systemet bara har den triviala lösningen och ekvationssystemet har *precis* en lösning för *varje* högerled, jfr Sats 3 i kapitel 1. Påstående 3. ger implikationen åt andra hållet i satsen, dvs: Om ett kvadratiskt homogent ekvationssystem bara har den triviala lösningen, så har ekvationssystemet precis en lösning för varje högerled. Vi har därmed bevisat en variant av Sats 3 i kapitel 1. Påstående 6. ger implikationen åt ena hållet som den är formulerad i satsen, nämligen att om ett ekvationssystem har *precis* en lösning för *något* högerled, så har motsvarande homogena system bara den triviala lösningen. Påstående 4. har vi använt ovan när vi påpekade att t.ex. $\text{radrang}(A) \leq n$ om A är en $m \times n$–matris. Påstående 5. ger att om en $n \times n$–matris A uppfyller att $\text{kolrang}(A) = n$, så gäller att $\text{kolrum}\,(A) = R^n$, vilket enligt ovan (med hjälp av 2.) ger att kolonnerna bildar en bas för R^n och därmed att ekvationssystemet $AX = B$ har entydig lösning för varje B.

Vi är nu mogna att visa följande sats för kvadratiska matriser (som sammanfattar Sats 6 och 7 i kapitel 2.4 i boken). E betecknar enhetsmatrisen.

Sats. Låt A vara en $n \times n$–matris. Då är följande villkor ekvivalenta:

(i) $\text{radrang}(A) = n$.

(ii) $\text{kolrang}(A) = n$.

(iii) Det finns en matris C sådan att $CA = E$, dvs A har en vänsterinvers.

(iv) Det finns en matris B sådan att $AB = E$, dvs A har en högerinvers.

(v) A är inverterbar.

Bevis. Vi ger först ett bevis som använder sig av Sats 6–8 i kapitel 2.4. Antag att (ii) gäller. Då har (enligt ovan) ekvationssystemet $AX = B$ entydig lösning för varje B och Sats 6 ger att A är inverterbar, dvs (v) gäller. Antag att (v) gäller. Då har $AX = B$ entydig lösning för varje B enligt kalkylen i boken som föregår Sats 6. Alltså gäller (enligt ovan) att kolonnerna i A bildar en bas för R^n och därför gäller (ii). Antag nu att (i) gäller. Då gäller $\text{kolrang}(A^t) = n$ och därmed, enligt vad vi just har visat, att A^t är inverterbar. Sats 8 ger att (v) gäller. Omvänt, om (v) gäller, så ger Sats 8 att A^t är inverterbar och därmed, enligt vad vi har visat, att $\text{kolrang}(A^t) = n$, dvs $\text{radrang}(A) = n$. Vi har därmed visat (ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (i). Men Sats 7 ger att (iii) $\Leftrightarrow$ (v) och (iv) $\Leftrightarrow$ (v).

Vi skall nu ge ett direkt bevis som inte använder sig av satser i boken. Vi lägger upp beviset på följande vis: (ii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(ii) och (iii)&(iv)$\Leftrightarrow$ (v).

(ii)$\Rightarrow$(iv). Antag att kolrang$(A) = n$. Det betyder (enligt påstående 5. och 2.) att kolonnerna $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$ i A bildar en bas i R^n. Varje vektor i R^n är alltså en linjärkombination av $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, dvs kan skrivas AX där X är en lämplig kolonnmatris. Utnyttja nu detta för "enhetskolonnerna" $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i R^n och låt oss säga att motsvarande kolonnmatriser är $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$. Vi har alltså att $AB^{(1)} = e_1$, $AB^{(2)} = e_2, \ldots, AB^{(n)} = e_n$. Skriver vi $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}$ efter varandra får vi en $n \times n$–matris $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)})$ med egenskapen att $AB = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, dvs $AB = E$. Därmed är (ii)$\Rightarrow$(iv) visad.
(iv)$\Rightarrow$(i). Antag nu att $AB = E$. Vi skall visa att radrang$(A) = n$. Enligt påstående 3. ovan räcker det att visa att raderna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är linjärt oberoende. Antag därför att en linjärkombination är 0, säg $YA = 0$. Vi skall visa att alla koefficienterna i linjärkombinationen är 0, dvs att $Y = 0$. Men det är bara att multiplicera $YA = 0$ till höger med B och utnyttja att $AB = E$. Vi får $(YA)B = 0 \cdot B = 0$, vilket ger $Y = YE = Y(AB) = (YA)B = 0$ och alltså $Y = 0$.
(i)$\Rightarrow$(iii). Följer (med hjälp av Sats 5 i 2.4) av (ii)$\Rightarrow$(iv) tillämpad på A^t.
(iii)$\Rightarrow$(ii). Följer (med hjälp av Sats 5 i 2.4) av (iv)$\Rightarrow$(i) tillämpad på A^t.
(v)$\Rightarrow$(iii)&(iv). Följer av definitionen på inverterbarhet.
(iii)&(iv)$\Rightarrow$(v). Antag att $CA = AB = E$. Då följer att $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$ och därmed är A inverterbar.

Vi ser alltså att för kvadratiska $n \times n$–matriser är det ekvivalent att radrangen är maximal ($= n$) och att kolonnrangen är maximal. Sådana matriser kallar vi fullrangsmatriser och det är alltså samma sak som inverterbara matriser. (Begreppet fullrangsmatris används också för icke-kvadratiska $m \times n$–matriser och betyder att rang$(A) = \min(m, n)$.) Vi skall senare tillfoga ett sjätte ekvivalent villkor på A, nämligen att determinanten $\neq 0$. (Jfr satserna 17 i kapitel 5 och 15 i kapitel 14.)

Christian Gottlieb, hösten -95 och Clas Löfwall hösten -01.