MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Avd. Matematik
Examinator: Jörgen Backelin

Tentamensskrivning i kombinatorik fdk, 2002-05-28

09^{00}–14^{00}

1. Utred den andra raden i "den tolvfaldiga vägen", d. v. s. antalet funktioner $f : N \to X$ (dels samtliga, dels injektiva, dels surjektiva), där N består av n likadana element, och X av x olika element.
   Du bör både ange antalen, förklara införda beteckningar, och visa att dina påståenden stämmer. 3 p

2. Ett ord (en sträng) s innehåller ett ord t som delord, om s på minst ett sätt kan skrivas som en sammansättning av tre ord, $s = s_1 t s_2$, där t är det mittersta (och där vi tillåter att det ena eller båda av s_1 och s_2 är tomma ord; så s självt är alltid ett delord av s).

   a) Låt H_n vara mängden av ord s av längd n i alfabetet $\{x, y, z\}$, sådana att varken xx eller yz är delord av s. Beräkna den genererande funktionen $h(x)$ för H_n ($n \in \mathbb{N}$). Visa speciellt att $h(x)$ är en rationell funktion, d. v. s. kan uttryckas som (serieutvecklingen i origo av) kvoten av två polynom. 2 p

   b) En svepande generalisering: Visa att om Σ är ett alfabet med r element, $r_1, \ldots, r_m$ är m stycken ord av längd 2, och F_n är mängden av ord i Σ av längd n och saknande $r_1, \ldots, r_m$ som delord, så är den genererande funktionen $f(x)$ för $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ rationell. 3 p
   Ledning: Detta kan göras på flera goda sätt. Bl. a. kan man införa r stycken delfunktioner $a_i(n) := |\{s \in F_n : s \text{ börjar på } x_i\}|$ (där $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_r\}$), och hitta ett matrissamband mellan dem. I så fall kan man ha nytta av att använda *Cayley-Hamiltons sats*: om $p(x) = \det(xE - A)$ är det karakteristiska polynomet för en kvadratisk matris A, så är $p(A) = 0$. (Cayley-Hamiltons sats får användas utan bevis.)

3. Låt L vara ett lattice, sådant att den första distributiva lagen uppfylls: För alla $x, y, z \in L$ gäller $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Visa att då måste också den andra distributiva lagen vara uppfylld, d. v. s. att för alla $x, y, z \in L$ gäller $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. (Bara den första distributiva lagen, och sådana egenskaper som gäller för alla lattice (t. ex. att $(x \wedge y) \vee x = x$), får användas utan bevis.) 3 p

4. För varje pomängd ("poset") $(P, <)$, så bildar alla de pomängder som är isomorfa med $(P, <)$ en *isomorfiklass*. Låt $\mathbf{A} = \{\text{isomorfiklasser av ändliga pomängder}\}$. Inför en relation $<_{\mathbf{A}}$ på mängden $\mathbf{A}$, genom att låta $p <_{\mathbf{A}} q$ omm p innehåller någon pomängd P och q någon pomängd Q, sådana att P är en äkta inducerad delpomängd ("subposet") av Q.

   a) Visa att $(\mathbf{A}, <_{\mathbf{A}})$ själv är en pomängd, men inte en ändlig pomängd. 2 p

   b) Visa att $\mathbf{A}$ har ett minsta element $\hat{0}$, men inte ett största element. 2 p

   c) Avgör huruvida $\mathbf{A}$ har en rangfunktion ("is graded"), i meningen att för varje element $p \in \mathbf{A}$ alla maximala kedjor från $\hat{0}$ till p har samma längd. 2 p

   d) Avgör huruvida $\mathbf{A}$ är ett lattice. 2 p

(*V.G.V.*)

e) Rita upp intervallet $[p, q]$, där p är ekvivalensklassen till $[2]$, och q är ekvivalensklassen till (det booleska latticet) B_2.
Beräkna med ledning av detta $\mu(p, q)$, där μ är Möbiusfunktionen. 2 p

5. a) Låt för $n = 0, 1, \ldots$ M_n vara de binära strängar $s = b_1 b_2 \cdots b_{2n}$ av längd $2n$, som uppfyller att s innehåller n nollor och n ettor, samt att varje vänster delsträng $b_1 \cdots b_\ell$ innehåller minst lika många ettor som nollor.
Visa att $|M_n| = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ för varje n, genom direkt räkning. 3 p
(Det räcker alltså **inte** i **denna** deluppgift att bara ge en bijektion mellan M_n och någon annan välkänd mängd F_n, där familjen $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ också räknas av Catalantalen C_n. Du måste då också visa att $|F_n| = C_n$.)

Låt nu som vanligt $S_n = \{\text{permutationer av } [n]\} = \{\text{bijektioner } \sigma : [n] \to [n]\}$. Betrakta mängderna $S_n^{(123)}$ och $S_n^{(321)}$ av permutationer av $[n]$ som undviker mönstret (123) respektive mönstret (321). (Formella definitioner:

$$S_n^{(123)} = \{\sigma \in S_n : (\nexists (i, j, k) \text{ med } i < j < k \text{ och } \sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k))\};$$
$$S_n^{(321)} = \{\sigma \in S_n : (\nexists (i, j, k) \text{ med } i < j < k \text{ och } \sigma(i) > \sigma(j) > \sigma(k))\}.)$$

b) Visa för varje n att $\left|S_n^{(123)}\right| = \left|S_n^{(321)}\right|$, genom att ange en explicit bijektion

$$\phi_n : S_n^{(123)} \to S_n^{(321)}.$$ 2 p

c) Visa för varje n att $\left|S_n^{(123)}\right| = C_n$, antingen genom direkt räkning, eller genom att etablera bijektioner mellan $S_n^{(123)}$ (eller $S_n^{(321)}$) och andra kända mängder med Catalantal många element (exempelvis M_n från första deluppgiften). 3 p

Jag påminner om att du bör ange din elpostadress på skrivningsomslaget, för att få personligt besked om ditt resultat, och i förekommande fall förslag på tid för muntlig tentamen.