

Räkneövning 1

1. Visa att polynomet

$$x^{60} + 2x^{59} - x^{58} - 2x^{57} + x^{56} + 2x^{55} - x^{54} - 2x^{53} + x^{52} \dots \\ \dots + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$

är delbart med $x^2 - 1$.

2. Beräkna (så enkelt som möjligt) det exakta värdet av

$$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

för $x = \frac{3}{10}$.

3. Lös olikheten

$$x + |x - 3| \geq |x - 1| + 2.$$

4. Lös ekvationen

$$\sqrt{4x - 3} + |x - 2| = |x + 1|.$$

5. Lös ekvationen

$$\sqrt{2^x} = 2^{\sqrt{x}}.$$

6. Lös ekvationen

$$2^{4x} - 4^{x+1} + \frac{7}{4} = 0.$$

7. Lös ekvationen

$$\ln x + 2 \ln(x + 2) - 3 \ln(x + 1) = 0.$$

8. Vilket av de båda talen

$$\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})} \quad \text{och} \quad (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$$

är störst?

9. Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^n (2k(n-1) + 1).$$

10. Bestäm en summaformel för summan

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

exempelvis genom att göra omskrivningen

$$\begin{array}{cccccccc} x & + & 2x^2 & + & 3x^3 & + & \dots & + & (n-1)x^{n-1} & + & nx^n & = \\ x & + & x^2 & + & x^3 & + & \dots & + & x^{n-1} & + & x^n & + \\ & & x^2 & + & x^3 & + & \dots & + & x^{n-1} & + & x^n & + \\ & & & & x^3 & + & \dots & + & x^{n-1} & + & x^n & + \\ & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & x^{n-1} & + & x^n & + \\ & & & & & & & & & & x^n & . \end{array}$$

och sedan tillämpa summaformeln för en geometrisk serie på var och en av raderna i högerledet ovan.