Lösningar till tentamensskrivning i Introduktionskurs, 5p, 2005-03-11

1. ${}^2\log 6 \;-\; {}^4\log 9 = {}^2\log(2\cdot 3) \;-\; {}^4\log 2\,\cdot\,{}^2\log 9 = {}^2\log 2 \;+\; {}^2\log 3 \;-\; \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\,{}^2\log 3 = {}^2\log 2 = \underline{1}$.

2. $\tan\frac{43\pi}{6} = \tan(7\pi + \frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6}$ eftersom tan har (minsta) perioden π; och
$\tan\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.

3. $\dfrac{2^{-2} + {}^7\log 49}{2^{-3} + {}^\pi\log\pi} = \dfrac{\frac{1}{4}+2}{\frac{1}{8}+1} = \dfrac{(\frac{9}{4})}{(\frac{9}{8})} = \underline{2}$.

4. $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, och $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, så det sökta absolutbeloppet är $\dfrac{(2\sqrt{3})^8}{\sqrt{2}^{15}} = 2^8\cdot 3^4\cdot 2^{-\frac{1}{2}\cdot 15} = 3^4\cdot 2^{\frac{1}{2}} = \underline{81\sqrt{2}}$.
$\arg(\sqrt{3}+3i) = \arg\big(\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}+3i)\big) = \arg(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$, och $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, så

$$\arg\frac{(\sqrt{3}+3i)^8}{(1-i)^{15}} = 8\cdot\frac{\pi}{3} - 15\cdot(-\frac{\pi}{4}) = \frac{(8\cdot 4+15\cdot 3)\pi}{12} = \frac{77\pi}{12} = 3\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{12}\;;$$

eller, efter att ha förenklat delsvaret genom att välja en annan representant "modulo" 2π: argumentet är $\frac{5\pi}{12}$.

5. Eftersom $\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$ (fortfarande!), så dividerar vi först båda led med $2\sqrt{3}$, vilket ger $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$. Alltså måste det finnas ett heltal k sådant att $x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}+2k\pi$, eller $x+\frac{\pi}{6} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; d. v. s. $\underline{x = 2k\pi \text{ eller } x = (2k+\frac{2}{3})\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$.

6. Skulle ekvationen ha en **rationell** rot, så kan denna skrivas $x = \frac{p}{q}$, där heltalet p delar 12, heltalet q delar 2, q är positivt, och p är udda om $q = 2$. Detta ger möjligheterna $p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$ eller ±12, och $q = 1$ eller $q = 2$, och alltså x något av ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, $\pm\frac{1}{2}$ och $\pm\frac{3}{2}$. (Dessutom ser man att alla fyra termerna i vänsterledet blir negativa om $x<0$, så de negativa x-värdena behöver inte prövas.) Prövning visar att verkligen $x = \frac{3}{2}$ är en rot; och polynomdivision ger att $2x^3-3x^2+8x-12 = (x-\frac{3}{2})(2x^2+8)$. Eftersom $2x^2+8=0 \iff x^2 = -4 = (2i)^2$, blir svaret $\underline{x = \frac{3}{2} \vee x = \pm 2i}$.

7. Eftersom definitionen av kvadratrot direkt ger att $\sqrt{5x+1}\ge 0$ och $2+\sqrt{x}\ge 2+0\ge 0$, så gäller ekvivalenserna $\sqrt{5x+1}\ge 2+\sqrt{x} \iff (\sqrt{5x+1})^2 \ge (2+\sqrt{x})^2 \iff 5x+1\ge 4+4\sqrt{x}+x$ $\iff 4x-4\sqrt{x}+1\ge 4 \iff (2\sqrt{x}-1)^2-2^2\ge 0 \iff (2\sqrt{x}+1)\,(2\sqrt{x}-3)\ge 0$. Vi gör en teckenstudietabell (som börjar vid $x=0$, eftersom $\sqrt{x}$ ej är definierat för x negativt):

x	0		$\frac{9}{4}$	
$\sqrt{x}$	0		$\frac{3}{2}$	
$2\sqrt{x}+1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2\sqrt{x}-3$	$-$	$-$	0	$+$
hela	$-$	$-$	0	$+$

vilket ger svaret: De x som uppfyller $x\ge\frac{9}{4}$.

$(V.G.V.)$

8. $|1+i| = \sqrt{2}$, och $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, så $(1+i)^{21} = \sqrt{2}^{21}(\cos\frac{21\pi}{4} - i\sin\frac{21\pi}{4}) =$
$= 2^{\frac{1}{2}\cdot 21}\big(\cos(4\pi + \frac{5\pi}{4}) + i\sin(4\pi + \frac{5\pi}{4})\big) = 2^{10+\frac{1}{2}}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = 2^{10}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}) =$
$\underline{-1024 - 1024i}$. (Svaret $-2^{10} - 2^{10}i$ kunde också ge full poäng.)

9. Eftersom ${}^2\log(4x^2) = {}^2\log 4 + {}^2\log x^2 = 2 + 2\cdot{}^2\log x$, är $({}^2\log x)^2 + 4\cdot{}^2\log(4x^2) + 7 = 0 \iff ({}^2\log x)^2 + 4(2 + 2\cdot{}^2\log x) + 7 = 0 \iff ({}^2\log x)^2 + 8\cdot{}^2\log x + 15 = 0$. Ansätt därför $t = {}^2\log x$ ($\iff x = 2^t$). $t^2 + 8t + 15 = 0 \iff t = -3 \vee t = -5$, vilket ger $x = 2^{-3} = \underline{\frac{1}{8}}$ eller $x = 2^{-5} = \underline{\frac{1}{32}}$.

10. Eftersom bevis skall övertyga om riktigheten av ett påstående snarare än memoreras som utantillkunskaper, är det inte så fruktbart att ge *just mitt* bevis av a). Den sökta ändringen av (1) i b) är $\#(A\cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A\cap B)$. Varje element i $A\cup B$ räknas ju med **en** gång i vänsterledet, och skall ju därför räknas med precis en gång i högerledet också. För element som ligger bara i A eller bara i B är detta inget problem; men element i $A\cap B$ räknas ju med **två** gånger, en gång i $\#(A)$ och en gång i $\#(B)$. Därför måste vi subtrahera antalet sådana element, d. v. s. $\#(A\cap B)$, från högerledet, för att likheten skall gälla även i detta fall. (Några löste helt elegant först deluppgift b), och påpekade sedan att likheten (1) direkt följer i det disjunkta fallet, eftersom då $\#(A\cap B) = \#(\emptyset) = 0$.)