Lösningar till tentamensskrivning i Matematisk analys 1, 2006–03–21

1. Enklast löses ekvationen genom att man noterar att för en lösning uppfyller vinkeln $u :=$ $\arcsin 3x = \arctan 5x$ att $\sin u = 3x$ och $\tan u = 5x$, så att då
$\sin u = \frac{3}{5} \cdot 5x = \frac{3}{5} \tan u = \frac{3}{5} \frac{\sin u}{\cos u}$, varav följer att

$$\sin u \cdot \big(1 - \frac{\frac{3}{5}}{\cos u}\big) = 0\,. \tag{1}$$

(1) uppfylls omm $\sin u = 0$ eller $\cos u = \frac{3}{5}$, d. v. s. omm $\sin u \in \{0, -\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\}$ (där vi använt trigonometriska ettan för att beräkna $\sin u$ när $\cos u = \frac{3}{5}$). Eftersom vidare $u = 3x$, måste $x \in \{0, \pm\frac{4}{15}\}$. Det återstår att kontrollera att dessa tre lösningar verkligen också satisfierar ursprungsekvationen. Direkt insättning verifierar att $x = 0$ är en rot. $x = \frac{4}{15}$ ger $3x = \frac{4}{5} \in D_{\text{arcsin}}$, $5x = \frac{4}{3} \in D_{\text{arctan}}$, både $\arcsin 3x$ och $\arctan 5x$ i intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$, och (1) uppfylld; så detta är en lösning. På samma sätt ger $x = -\frac{4}{15}$ $3x = -\frac{4}{5} \in D_{\text{arcsin}}$, $5x = -\frac{4}{3} \in D_{\text{arctan}}$ och både $\arcsin 3x$ och $\arctan 5x$ i $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ samt (1) uppfylld att även detta är en lösning.

Kommentar: Det är riskabelt att utgå från att skrivningstal alltid är så konstruerade att en rot måste förkastas.

2. a) När $x \to 0$ så gäller också $u := 2x \to 0$ och $v := e^{2x} - 1 \to 0$, så
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 = \lim_{v\to 0} \frac{\sin v}{v} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{u} \cdot 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{2}$.

   b) Använd att för $t := \frac{\pi}{2} - x$ gäller att $\tan x = \cot t$, samt att om $x \to \frac{\pi}{2}$ så $t \to 0$:
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x = \lim_{t\to 0} t \cot t = \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \big(\frac{t}{\sin t}\big) = \lim_{t\to 0} \cos t \cdot \big(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\big)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = \underline{1}$.

3. f är definierad, kontinuerlig och deriverbar överallt, utom för $x = -2$.
$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2) - (x^2 - x + 3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$, där nämnaren alltid är positiv, men täljaren är 0 i randpunkterna till och negativ i det inre av intervallet $[-5, 1]$. Alltså är f strängt växande i intervallet $]-\infty, -5]$ och i intervallet $[1, \infty[$, och strängt avtagande i intervallet $[-5, -2]$ och i intervallet $[-2, 1]$, antar det lokala maximivärdet -11 för $x = -5$, och det lokala minimivärdet 1 för $x = 1$. (Redan det faktum att "maximivärdet" är mindre än "minimivärdet" visar att f saknar globala extremvärden). Vidare kan vi skriva $f'(x) = 1 - \frac{1}{9}(x+2)^{-2}$, vilket direkt ger

$$f''(x) = \frac{(-9)\cdot(-2)}{(x+2)^3} = \frac{18}{(x+2)^3}\,,$$

vars täljare alltid är positiv; så f'' har samma tecken som nämnaren, d. v. s. är negativ för $x < -2$ och positiv för $x > -2$. Alltså är f strängt konkav i $]\infty, -2[$, och strängt konvex i $]2, \infty[$.
Asymptoter: Lodräta kan bara finnas för $x = -2$. Mycket riktigt är

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \text{ och } \lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty\,,$$

(V.G.V.)

så linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot. För eventuella vågräta eller sneda asymptoter undersöker vi först $\dfrac{f(x)}{x}$ när $x \to \pm\infty$. Eftersom

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 2x} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}},$$

är båda dessa gränsvärden 1. Vidare är

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 3 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -3,$$

så linjen $y = x - 3$ är sned asymptot både för $x \to -\infty$ och för $x \to +\infty$. Kurvskissen utgår av datatekniska skäl.

4. a) Uppgiften kan lösas på flera goda sätt. Jag väljer här ett sätt, som man kan resonera sig fram till, så här:
Om inte faktorn x hade funnits, så skulle det vara rätt lätt att lösa uppgiften genom att skriva om integranden som $\cos x f(\sin x)$ för ett lämpligt polynom f, och sedan göra variabelsubstitutionen $u = \sin x$. Finns det då något sätt att bli av med detta retliga x? **Ja**, för derivatan av x är ju 1, så vi kan partialintegrera bort x.
Vi vill alltså derivera x, och samtidigt integrera resten. Nu är

$$\int \cos x \cos 2x\,dx = \int \cos x\,(1 - 2\sin^2 x)\,dx \overset{\left[\substack{u=\sin x\\ du=\cos x}\right]}{=} \int 1 - 2u^2\,du = u - \tfrac{2}{3}u^3 + C_1$$
$$= \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + C_1,$$

där vi kan välja $C_1 = 0$. Det ger

$$\int x \cos x \cos 2x\,dx = x(\sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x) - \int \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x\,dx,$$

där substitutionen $v = \cos x$ ger $-\int \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x = \int -\sin x\left(1 - \frac{2}{3}(1-\cos^2 x)\right)dx = \displaystyle\int \frac{1+2v^2}{3}dv = \frac{3v + 2v^3}{9} + C = \frac{3\cos x + 2\cos^3 x}{9} + C$, och alltså totalt att de sökta primitiva funktionerna är $\underline{\frac{1}{9}(9x\sin x - 6x\sin^3 x + 3\cos x + 2\cos^3 x) + C,}$ $C \in \mathbb{R}$.

b) $D\big(\arctan(\sin x + \cos x)\big) = \dfrac{1}{1 + (\sin x + \cos x)^2} \cdot (\cos x - \sin x) = \underline{\dfrac{\cos x - \sin x}{2(1 + \sin x \cos x)}}$.

5. Variabelsubstitutionen $u = \ln x$ ger $x = e^u$, $du = \dfrac{dx}{x}$ och
$\displaystyle\int \frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1 - \ln u}{u^2}\,du = \frac{-1}{u} - \int \frac{\ln u}{u^2}\,du$. Partiell integration (där $\ln u$ deriversa och $\frac{1}{u^2}$ integreras) ger
$\displaystyle\int \frac{\ln u}{u^2}\,du = -\frac{\ln u}{u} - \int -\frac{1}{u^2}\,du = -\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} - C$, så att hela integralen blir
$\displaystyle\frac{-1}{u} - \left(-\frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} - C\right) = \frac{\ln u}{u} + C = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} + C$. Vi får **en** primitiv funktion genom

(*V.G.V.*)

att t. ex. välja $C = 0$. Denna primitiva funktion $F(x) = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ uppfyller $F(e) = 0$ samt $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$, så den bestämda integralen är

$$\int_e^\infty \frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(e) = 0 - 0 = 0\,.$$

6. a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x^2) - e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{1+x^2}$, och svl e^x som $1 + x^2$ är positiva för alla (reella) x; så $f'(x)$ har samma tecken som $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, d. v. s. $f'(1) = 0$ men $f'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$. Alltså ger $x = 1$ den enda stationära punkten, $\underline{(1, \frac{e}{2})}$, och denna är en terrasspunkt.

b) f är definierad och deriverbar på ett sammanhängande intervall och har positiv derivata överallt utom i en punkt. Alltså är f strängt växande; alltså injektiv; alltså inverterbar. Eftersom dessutom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} = 0$, är $D_{f^{-1}} = V_f =]0,\infty[$ och $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$.

c) f^{-1} är deriverbar precis för de $x \in D_{f^{-1}}$ där grafen för f^{-1} har en tangent i punkten $\big(x, f^{-1}(x)\big)$, och denna tangent inte är lodrät (d. v. s. vertikal). Nu är ju grafen för f^{-1} spegelbilden i linjen $y = x$ till grafen för f; och eftersom f är definierbar i hela sitt definitionsområde, så har grafen för f tangent i varje punkt. Alltså har grafen för f^{-1} också tangent i varje punkt. Denna tangent är lodrät om och blott om dess spegelbild är en vågrät tangent till grafen för f. Det finns precis en sådan vågrät tangent, nämligen den som går genom terasspunkten $(1, \frac{e}{2})$.
Svar: $\underline{f^{-1} \text{ är deriverbar för alla positiva } x \text{ utom } x = \frac{e}{2}.}$