

Inga hjälpmedel (utöver normala skrivdon). 13 poäng inklusive bonus garanterar godkänt. Motivera samtliga lösningar noga. Om l'Hospitals regel eller Taylors formel används, så måste dessa bevisas.

1. Lös ekvationen $\arcsin 3x = \arctan 5x$. 4 p

2. Beräkna följande gränsvärden

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{2x} - 1)}{x}$. 2 p

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$. 2 p

3. Undersök lokala och globala extremvärden, asymptoter, monotonitetsgenskaper och konvexitetsgenskaper hos kurvan $y = f(x)$, där

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2}.$$

Skissera kurvan. 4 p

4. a) Bestäm alla primitiva funktioner till $x \cos x \cos 2x$. 2 p

b) Bestäm derivatan till $\arctan(\sin x + \cos x)$. 2 p

5. Bestäm en primitiv funktion till $\frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}$, och beräkna den generaliserade integralen

$$\int_e^{\infty} \frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2} dx. 4 p$$

6. Låt $f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$ för varje reellt tal x .

a) Undersök om funktionen f har några stationära punkter, och ange i så fall för var och en av dessa om den är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en terrasspunkt. 1 p

b) Visa att f är inverterbar, och beräkna definitionsmängden och värdemängden för f^{-1} . 2 p

c) Ange (med en ordentlig motivering) för vilka x i definitionsmängden till f^{-1} som f^{-1} är deriverbar. 2 p

Skrivningsåterlämning torsdagen 30/3 kl. 12²⁰–12⁴⁰ i sal 15; därefter hos Tom Wollecki.)