

Nollställena till Riemanns Zeta-funktion och dess  
Beteende på den Kritiska Linjen

Linus Bergkvist

## Introduktion

Riemannhypotesen beskrevs för första gången 1859 av Bernhard Riemann och lyder: Alla icke-triviala nollställen till Riemanns Zeta-funktion har Realdelen  $\frac{1}{2}$ . För  $\text{Re}(s) > 1$  definieras Riemanns Zeta-funktion som  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . För att kunna studera dess nollställen i det komplexa talplanet måste man alltså först hitta ett sätt att beskriva Zeta-funktionen på som gäller för alla  $s$  i  $C$ . Arbetet är i huvudsak uppdelat i 2 delar och ett Appendix. I den första delen begränsas Zeta-funktionens icke-triviala nollställen till en "remsa" i det komplexa talplanet (de triviala nollställena  $(-2, -4, -6, -8 \dots)$  får också sin förklaring). I den andra delen studeras nollställena längs den "kritiska linjen" ( $\frac{1}{2} + it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ). Det finns även ett appendix i vilket vissa, inte helt uppenbara satser som används i arbetet, härleds.

## Del 1

I denna del kommer det först att bevisas att zeta-funktionen inte har några nollställen för  $\text{Re}(s) > 1$ . Därefter påvisas en funktion som har samma nollställen som zeta-funktionen, och som därefter bevisas vara invariant från  $s \rightarrow (1-s)$ . Av denna invarians följer det att zeta-funktionen omöjligt kan ha några icke-triviala nollställen för  $\text{Re}(s) < 0$ . Därefter visas en funktion som på linjen  $1+it$ , har samma nollställen som zeta-funktionen. Därefter visas det att denna funktion inte har något nollställe för något värde på  $t$ , vilket har som följd att zeta-funktionen inte har några nollställen på linjen  $\text{Re}(s) = 1$ . Därefter följer det av den sedan tidigare påvisade invariansen att zeta-funktionen inte heller har några nollställen på linjen  $\text{Re}(s) = 0$ . Sammanfattningsvis har alltså zeta-funktionens nollställen begränsats till remsan  $0 < \text{Re}(s) < 1$ .

**Sats 1:** Det finns inga nollställen till Riemanns zeta-funktion med Realdelen  $> 1$ .

**Bevis:**

För  $s$  med  $\text{Re}(s) > 1$  definieras Riemanns zeta-funktion som  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \dots$$

$$\zeta(s) \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} \dots$$

$$\zeta(s) - \frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} \dots$$

Vi har nu tagit bort alla multiplar av  $\frac{1}{2^s}$

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} \dots$$

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} \dots$$

Vi har nu tagit bort alla

återstående multiplar av  $\frac{1}{3^s}$

Om man gör så med alla primtal får man:

$$\zeta(s) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots = \frac{1}{1^s} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \dots} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

$$\frac{\zeta(s)}{\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}} = 1 = \zeta(s) \cdot \prod_p (1 - p^{-s})$$

Då produkten till höger omöjligt kan ha några singulariteter visar detta att  $\zeta(s) \neq 0$  För  $\operatorname{Re}(s) > 1$

**Definition:** Den kompletta zeta-funktionen.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s(s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)$$

där

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t} dt$$

**Sats 2:** Den kompletta zeta-funktionens nollställen är nollställen för Riemanns zeta-funktion.

**Bevis:**

Då varken  $\frac{1}{2} \cdot s, (s-1), \pi^{-s/2}$  eller  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  har några nollställen utöver punkterna  $s = 0$  och  $s = 1$  så måste  $\xi(s)$  ha samma nollställen som  $\zeta(s)$ .

**Sats 3:**  $\xi(s) = \xi(1-s)$ .

**Bevis:**

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty t^{s/2-1} \cdot e^{-t} dt$$

Vi gör substitutionen  $t = \pi \cdot n^2 \cdot x$ .

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty \pi^{(s/2-1)} \cdot n^{2(s/2-1)} \cdot x^{(s/2-1)} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot x} dx$$

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot n^{-s} = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot e^{-\pi n^2 x} dx$$

Vi vet att  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$

Vi summerar båda leden över  $n$  med  $n > 0$  och erhåller då:

$$\sum_{n \geq 1} \pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot n^{-s} = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x} dx$$

framöver betecknar vi  $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi x n^2}$  som  $\omega(x)$ . Nu delar vi upp integralen vid 1 och erhåller:

$$\int_0^1 x^{s/2-1} \cdot \omega(x) dx + \int_1^\infty x^{s/2-1} \cdot \omega(x) dx$$

För att få samma integrationsgränser i de båda integralerna gör vi substitutionen  $x = x^{-1}$  i den första integralen och erhåller då:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1}) dx + \int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x) dx$$

Vi definierar nu funktionen  $\theta(x)$  som:

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-x n^2 \pi}$$

Eftersom  $n^2 = (-n)^2$  och  $e^{-x 0^2 \pi} = 1$  får vi att

$$\theta(x) = 2\omega(x) + 1$$

Vi använder nu Fouriertransformen på  $e^{-\pi n^2 x}$  och erhåller

$$\mathcal{F}(e^{-\pi n^2 x})(u) = x^{-1/2} \cdot e^{-\pi u^2/x}$$

Vi använder därefter summationsformeln från Sats 1 i appendix och erhåller då:

$$\theta(x) = x^{-1/2} \theta(x^{-1})$$

$$2\omega(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} (2\omega(x^{-1}) + 1) \Leftrightarrow \omega(x^{-1}) = \omega(x) \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$$

Om vi nu använder vårt uttryck för  $\omega(x^{-1})$  i den tidigare integralen erhåller vi:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1}) dx = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{(s+1)/2} \cdot \omega(x) dx$$

Och hela ekvationen blir då:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}) \cdot \omega(x) dx$$

Om vi byter ut  $s$  mot  $(1-s)$  i det högra uttrycket erhåller vi samma uttryck igen. Därför gäller det att  $\xi(s) = \xi(1-s)$

□

(Division med  $\Gamma(\frac{s}{2})$  i den sista likheten, innebär att zeta-funktionen har nollställen varje gång då  $\Gamma(\frac{s}{2})$  har en singularitet. På så sätt erhålls de "triviala nollställena")

**Sats 4:** De triviala nollställena till Riemanns zeta-funktion är de enda nollställena utanför intervallet  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ .

**Bevis:**

I Sats 1 bevisades det att  $\zeta(s)$  inte har några nollställen för  $\zeta(s)$  och i Sats 3 bevisades det att  $\xi(s) = \xi(1-s)$ . Om vi antar att det finns en punkt  $p$  med  $\operatorname{Re}(p) < 0$  sådan att  $\zeta(p) = 0$  innebär det av Sats 2 att  $\xi(p) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-p) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-p) = 0$  men om  $\operatorname{Re}(p) < 0$  är  $\operatorname{Re}(1-p) > 1$ . Då innebär det att det finns en punkt  $q = 1-p$  med  $\operatorname{Re}(q) > 1$  sådan att  $\zeta(q) = 0$ . Men detta strider mot Sats 1. Det kan alltså inte finnas en punkt  $p$  med  $\operatorname{Re}(p) < 0$  sådan att  $\zeta(p) = 0$ . □

**Sats 5:**  $\zeta(s+it) = 0$  för  $s = 1$  omm  $\zeta(s)^3 \cdot \zeta(s+it)^4 \cdot \zeta(s+2it) = 0$  för  $s = 1$ .

**Bevis:**

$\zeta(s)$  har en singularitet för  $s = 1$ . Men eftersom faktorn  $\zeta(s+it)^4$  är av högre grad kan singulariteterna för  $\zeta(s)$  inte ta ut ett eventuellt nollställe. Termen  $\zeta(s+2it)$  kan bli 0, men då den aldrig kan bli en singularitet kan den inte ta ut ett eventuellt nollställe. □

**Hjälpsats 6:**  $\ln(1-i) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

**Bevis:**

$$f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$$

Definitionen av Maclaurinpolynom är:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

men då  $\ln(1) = 0$  är:

$$\ln(1-x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

Derivering ger att

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$

↓

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)! \cdot x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

□

**Sats 7:**  $\zeta(s)$  har inga nollställen för  $\operatorname{Re}(s) = 1$ .

**Bevis:**

Vi använder oss av ett uttryck från Sats 1:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \ln(1) - \ln(1 - p^{-s}) = -\ln(1 - p^{-s})$$

$$\ln|\zeta(s)| = \ln\left|\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\right| = \sum_p \ln\left|\frac{1}{1 - p^{-s}}\right| = -\sum_p \ln|1 - p^{-s}| = -\operatorname{Re}\left(\sum_p \ln(1 - p^{-s})\right)$$

Hjälpsats 6 ger nu:

$$-\operatorname{Re}\left(\sum_p \ln(1 - p^{-s})\right) = \left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p^{-ns}}{n}\right)\right)$$

Vi definierar nu  $h(x) = \zeta(x)^3 \cdot \zeta(x + it)^4 \cdot \zeta(x + 2it)$ , logaritmlagarna ger nu:

$$\begin{aligned} \ln(h(x)) &= 3 \ln|\zeta(x)| + 4 \ln|\zeta(x + it)| + \ln|\zeta(x + 2it)| \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot p^{nx} \cdot \operatorname{Re}(3 + 4p^{-int} + p^{-int \cdot 2}) \end{aligned}$$

eftersom:

$$\frac{1}{n} \cdot p^{-nx} \geq 0$$

följer det att det vi måste undersöka är om

$$\operatorname{Re}(3 + 4p^{-int} + p^{-2int}) \geq 0$$

$$p^{-int} = e^{\ln(p) \cdot -int}$$

$$\theta = -\ln(p) \cdot n \cdot t \Rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow \operatorname{Re}(3 + 4 \cdot e^{i\theta} + e^{i2\theta})$$

Eulers formel ger nu:

$$\operatorname{Re}(3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = 3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta)$$

likheten  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$  ger:

$$3 + 4 \cos(\theta) + 2 \cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + 2 \cos(\theta) + \cos^2(\theta)) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0$$

alla termer i vår summa är alltså större eller lika med 0. Då exempelvis  $\theta = -\ln(2) \cdot 2$  ger en term  $> 0$  innebär detta att summan är strikt större än 0. Det finns alltså inga nollställen för  $\zeta(s)$  med  $\operatorname{Re}(s) = 1$ .

□

**Sats 8:** Det finns inga nollställen för  $\zeta(s)$  med  $\operatorname{Re}(s) = 0$ .

**Bevis:**

Sats 2 och 3 visar att om  $\zeta(s)$  är ett nollställe är  $\zeta(1-s)$  också det. Om det finns något  $\zeta(0+it) = 0$  följer även att  $\zeta(1-(0+it)) = \zeta(1-it) = 0$ . Men detta motbevisades i Sats 7.

Notera att Sats 2 inte fungerar i punkterna  $s = 1$  och  $s = 0$ . Med då  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  och  $\zeta(1) = \infty$  håller Satsen.  $\square$

## Del 2

I denna del så utgår man från ett uttryck av 2 variabler som bland annat innehåller  $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ , som därefter, genom flera hjälpsatser, skrivs om till ett annat uttryck. Detta uttryck förändras i sin tur genom derivering med avseende på en av variablerna. Genom ett motsägelsebevis visas det därefter slutligen att denna derivata omöjligt kan sluta växla tecken för  $t > T$  för något stort  $T$ . Då den enda funktionen i uttrycket som potentiellt sett kan växla tecken oändligt många gånger är  $\zeta(\frac{1}{2} + it)$  följer det därav att zeta-funktionen har oändligt många nollställen på den kritiska linjen.

**Sats 9:** Om  $\zeta(s) = 0$  för något tal  $s = \frac{1}{2} + it$  med  $t \in \mathbb{R}$  är  $\zeta(\bar{s}) = 0$

**Bevis:**

Det har tidigare visats att om  $\zeta(s) = 0$  är  $\zeta(1 - s) = 0$ .  $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1 - (\frac{1}{2} + it)) = \zeta(\frac{1}{2} - it) = 0$   $\square$

**Definition: Mellintransform**  $\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot f(x) dx$

Mellintransformen har inversionsformen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} x^{-s} \cdot \varphi(s) ds$$

**Hjälpsats 10:**

$$\{\mathcal{M}\omega\}(x) = \zeta(2s) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s}$$

med

$$\omega(y) = \sum_{n \leq 1} e^{-n^2 \pi y}$$

**Bevis:**

Denna likhet härleddes i Sats 3, men då utan beteckningen Mellintransform.

**Hjälpsats 11:**

$$\omega(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \zeta(zs) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s} \cdot y^{-s} ds \text{ för } c > \frac{1}{2}$$

**Bevis:**

Detta följer av att applicera Mellintransformens inversionsformel på Hjälpsats 10.

**Definition:**  $\Xi(t) = \zeta(\frac{1}{2} + it)$



**Sats 12:**

$$\int_0^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cdot \cos(xt) dt = \frac{1}{2} \pi (e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} \omega(e^{-2x}))$$

**Bevis:**

$$\text{Sätt } Q(x) = \int_0^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cdot \cos(xt) dt$$

Då  $(t^2 + \frac{1}{4}) \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)$  är symmetrisk kring  $t = 0$  (se Sats 9 för  $\Xi(t)$ 's symmetri) så gäller:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt) dt \quad (1)$$

Då  $\sin(xt)$  är "inverst symmetrisk" kring  $t = 0$  följer det att

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \sin(xt) dt = 0 \quad (2)$$

Addition av (1) och (2) tillsammans med Eulers formel ger nu:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot e^{ixt} dt$$

låt  $s = \frac{1}{2} + it$ . Då följer:

$$Q(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{2i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \frac{1}{s(1-s)} \Xi(s) \cdot e^{xs} ds$$

Definitionen av  $\xi(s)$  på den kritiska linjen ger nu:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs} ds$$

$\zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs}$  har singulariteter i  $s = 0$  och  $s = 1$ . Därmed följer det att om vi flyttar linjeintegralen till höger om linjen  $c = 1$  så korrigeras förändringen med att subtrahera residualen i  $s = 1$  så för  $c > 1$  gäller:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs} ds + \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(\zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs}, 1)$$

Då  $\text{Res}(\zeta(s), 1) = 1$  (se Appendix Sats 14) följer det att:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot e^x = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2} \cdot \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x} \pi}{2}$$

Därmed följer:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i} \cdot \int_{C-\infty}^{C+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs} ds + \frac{\pi}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

genom att sätta  $y = e^{-2x}$  erhålls det från Hjälpsats 11 att:

$$Q(x) = -\pi e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \omega(e^{-2x}) + \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \pi (e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \omega(e^{-2x}))$$

□

**Hjälpsats 13:** För alla heltal  $n$  gäller:

$$\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{d^{2n}[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia}))]}{da^{2n}} = 0$$

**Bevis:**

Observera att:

$$\begin{aligned} \omega(i+v) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+v)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi} \cdot e^{-\pi in^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi} \cdot (-1)^{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi} \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

Det sista steget gäller då udda  $n$  ger udda  $n^2$  och jämna  $n$  ger jämna  $n^2$ .

$$\begin{aligned} 2\omega(4v) - \omega(v) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi 4v} - e^{-n^2\pi v} = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(2n)^2\pi v} - e^{-n^2\pi v} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2\pi v} = \omega(i+v) = 2\omega(4v) - \omega(v) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\omega(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \omega\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \quad (\text{Se Sats 3 för härledning})$$

Vilket ger att (1) blir:

$$\omega(i+v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega\left(\frac{1}{4v}\right) - \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega\left(\frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2} \quad (2)$$

Om man nu skriver ut summorna ser man att  $\omega(i+v) + \frac{1}{2}$  och alla dess derivator går mot 0 då  $v \rightarrow 0$  för  $v \in \mathbb{R}^+$  vilket även innebär att de går mot 0 längs all vinklar  $|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi$  då vi för något  $v$  med  $\text{Re}(v) > 0$  har att:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{v}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{\text{Re}(v)}{|v|^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{|v|}}.$$

Då  $a \rightarrow \frac{\pi^+}{4}$  antyder att  $e^{2ia} \rightarrow i$  längs alla "vägar" med  $|\arg(e^{2ia} - i)| < \frac{1}{2}\pi$ , så bevisar detta Satsen □

**Sats 14:** Riemanns Zeta-funktion har oändligt många nollställen längst linjen  $\frac{1}{2} + it$

**Bevis:**

Genom att substituera  $x = -ia$  i Sats 12 så erhålls uttrycket:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cdot \cosh(at) dt &= \frac{\pi}{2} (e^{-\frac{1}{2}ia} - 2e^{\frac{1}{2}ia} \cdot \omega(e^{2ia})) \\ &= \pi \cos(\frac{a}{2}) - \pi e^{\frac{1}{2}ia} (\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \quad (1) \\ \text{där } \cosh(at) &= \frac{1}{2} (e^{-at} + e^{at}) \end{aligned}$$

om man nu deriverar (1)  $2n$  antal gånger med avseende på  $a$  får man:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \cdot \Xi(t) \cdot \cosh(at) dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{a}{2}) - \frac{\pi d^{2n}}{da^{2n}} \left[ e^{\frac{1}{2}ia} (\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \right]$$

(deriveringen sker ett jämnt antal gånger för att få en "regelbunden" derivata)  $a$  får nu gå mot  $\frac{1}{4}\pi^+$ . Hjälpsats 13 innebär nu att den sista termen i det högra ledet  $\rightarrow 0$ , vilket ger:

$$\lim_{a \rightarrow \frac{1}{4}\pi^+} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \Xi(t) \cdot \cosh(at) dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{\pi}{8}). \quad (2)$$

Om satsen är fel skulle det innebära att  $\Xi(t)$  har ändligt många nollställen vilket innebär att  $\Xi(t)$  aldrig ändrar tecken för  $t > T$  för något stort  $T$ . Antag nu att  $\Xi(t) > 0$  ( $\Xi(t) < 0$  hanteras på samma sätt). låt  $L$  Definieras som:

$$\lim_{a \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(at) dt = L$$

Då  $\cosh$  ökar monotont i  $[0, \infty]$  antyder det för  $T' > T$  att:

$$\begin{aligned} \int_T^{T'} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(at) dt &\leq L \\ \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{1}{4}\pi t) dt \end{aligned}$$

är absolut konvergent. Då  $(t^2 + \frac{1}{4})^{-1} t^{2n} \Xi(t) \cos(\frac{\pi}{4}t)$  är större än  $(t^2 + \frac{1}{4})^{-1} t^{2n} \Xi(t) \cosh(at)$  För alla  $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (Då  $\cosh$  växer monotont), låter Dominerande konvergenssatsen oss att byta plats på gränsvärdet och integralen. (2) ger nu att vi för varje  $n$  har:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \cos(\frac{\pi}{8})$$

Det är dock omöjligt då högerledet växlar tecken oändligt ofta. Låt  $n$  vara udda, högerledet är då strikt mindre än 0 och vi har då:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt < 0$$

$$\int_T^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt < - \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt$$

Då  $T$  är fixt är:

$$\left| \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt \right| \leq T^{2n} \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} |\Xi(t)| \cosh(\frac{1}{4}\pi t) dt$$

sätt  $R = \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} |\Xi(t)| \cosh(\frac{1}{4}\pi t) dt$ . Detta ger nu:

$$- \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt \leq RT^{2n}$$

där  $R$  är oberoende av  $n$ . Man kan nu anta att det finns ett  $K > 0$  så att  $\Xi(t)(t^2 + \frac{1}{4})^{-1} > K$  för alla  $2T < t < (2T + 1)$  så att:

$$\int_T^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) dt \geq \int_{2T}^{2T+1} t^{2n} K dt \geq K \cdot (2T)^{2n}$$

Därmed är

$$K(2T)^{2n} < RT^{2n}$$

för alla  $n$ , vilket är ekvivalent med:

$$2^{2n} < \frac{R}{K}$$

vilket är omöjligt då  $\frac{R}{K}$  är oberoende av  $n$  och  $n$  kan väljas godtyckligt stort. Vi har därmed en motsägelse, Satsen är bevisad. □

## Appendix

### Definition: Fourierserie och Fouriertransform.

Eulers formel ger att  $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$  Men går det att uttrycka en funktion som en oändlig summa med sinus och cosinusvågor?

Mer matematisk blir frågan om kan man skriva en funktion  $f(t)$  som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i \cdot n \cdot t}$$

Detta går om  $f(t)$  är periodisk med perioden  $2\pi$ . Om så är fallet gäller:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i \cdot n \cdot t}$$

$$f(t) \cdot e^{-i \cdot m \cdot t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (e^{i(n-m) \cdot t})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i \cdot m \cdot t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i(n-m) \cdot t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m) \cdot t} dt$$

Integralen på höger sida = 0 om  $n \neq m$  och =  $2\pi$  om  $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i \cdot m \cdot t} dt = C_n \cdot 3\pi = C_m \cdot 2\pi \Leftrightarrow C_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{i \cdot m \cdot t} dt$$

Mer generellt så gäller att om  $f(t)$  har en Period  $L$  så är:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i \cdot n \cdot 2\pi \cdot \frac{t}{L}}$$
$$\text{där } C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \cdot e^{-\frac{i \cdot n \cdot 2\pi}{L} t} dt$$

där  $C_n$  kallas för den  $n$ :te Fourierkoefficienten till  $f(t)$ .  
Fouriertransformen av en funktion  $f(t)$  definieras som:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot u \cdot t} dt$$

**Sats 1:**  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)$  där  $\hat{f}(m)$  är Fouriertransformen till  $f(n)$ .

**Bevis:**

Vi börjar med att definiera  $g(x)$  som  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  eftersom  $g(x)$  är periodisk med perioden 1 kan vi skriva ett uttryck för dess Fourierkoefficienter.

$$\begin{aligned} \hat{g}_k &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \cdot e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) \cdot e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) \cdot e^{-ikx} dx \\ &= \dots \int_{-1}^0 f(x) \cdot e^{-ikx} dx + \int_0^1 f(x) \cdot e^{-ikx} dx + \int_1^2 f(x) \cdot e^{-ikx} dx \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Som är fouriertransformen av  $f(x)$ .

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \cdot e^{ikx}$$

som är fourierserien till  $g(x)$ . Om vi nu väljer  $x = 0$  får vi:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \cdot e^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

□

**Sats 2:** Om  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  är differentierbar i punkten  $z_0 = x_0 + iy_0$  måste:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ och } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

**Bevis:**

Vi utgår från derivatans definition:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  får gå mot 0 från alla riktningar i det komplexa planet. Om  $\Delta z \rightarrow 0$  horisontellt är  $\Delta z = \Delta x$  och vi får då:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, +) - u(x_0, y_0)}{\Delta} \right] x, y \Delta x + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0, +) - v(x_0, y_0)}{\Delta} \right] x, y \Delta x \\ &= \frac{du}{dx}(x_0, y_0) + i \frac{dv}{dx}(x_0, y_0) = f'(z_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y) + iv(x_0 + \Delta x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0 + \Delta x, y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{du}{dx}(x_0, y_0) + i \frac{dv}{dx}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}$$

Om  $\Delta z \rightarrow 0$  vertikalt är  $\Delta z = i\Delta y$  och vi får då:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\
&= -i \frac{du}{dy}(x_0, y_0) + \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}$$

Om vi sätter real-delarna lika med varandra och imaginärdelarna lika med varandra får vi:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

□

**Definition: Klass  $C_1$**  Låt  $f$  vara definierad i en mängd  $D$ . Vi säger att  $f$  är av klass  $C_1$  om  $f$  är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i  $D$ .

**Sats 3:** För två funktioner av klass  $C_1$ ,  $P(x, y)$  och  $Q(x, y)$  gäller det att:

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dx dy$$

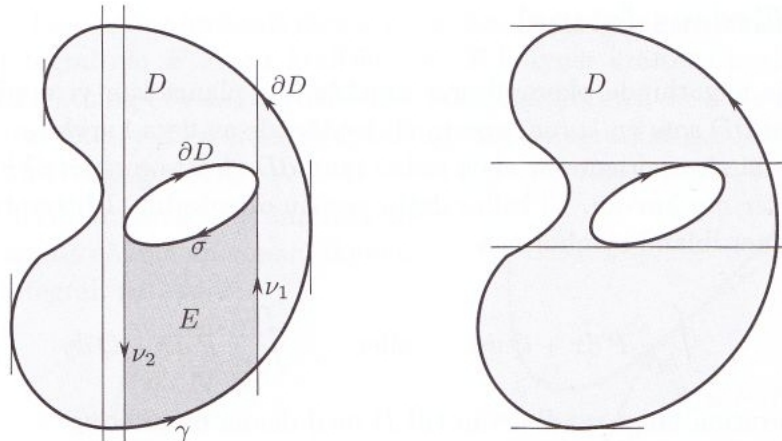
Där  $D$  är ett kompakt område och  $\partial D$  är randen till  $D$ .

**Bevis:**

Beviset genomförs under förutsättningen att  $D$  med räta linjer, parallella med y-axeln, kan delas upp i ett ändligt antal områden av typen:

$$E\{(x, y) : \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), a \leq x \leq b\}$$

Och att det finns en motsvarande uppdelning för x-axeln



Inledningsvis visas det att:

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} P dx &= \iint_E -\frac{dP}{dy} dx dy \\ \iint_E -\frac{dP}{dy} dx dy &= \int_{x=a}^b [-P(x, y)]_{x=\psi(x)}^{x=\varphi(x)} dx \\ &= \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_b^a P(x, \varphi(x)) dx \end{aligned} \quad (1)$$

Kurvan  $\gamma$  i figuren kan framställas med  $x$  som parameter:

$$\gamma = (x, \psi(x)), a \leq x \leq b.$$

Den första integralen i (1) kan därför skrivas som

$$\int_{\gamma} P dx + 0 dy = \int_{\gamma} P dx. \quad (2)$$

På samma sätt får vi för den andra termen att:

$$-\int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \int_{\sigma} P dx \quad (3)$$

då kurvintegralen av de (eventuella) randstyckena  $v_1$  och  $v_2$  är noll innebär detta att addition av (2) och (3) ger  $\int_{\partial E} P dx$ , vilket innebär att:

$$\int_{\partial E} P dx = \iint_E -\frac{dP}{dy} dx dy.$$

genom att addera ihop det här resultatet för alla uppkommande områden av  $E$  ger detta:

$$\int_{\partial D} P dx = \iint_D -\frac{dP}{dy} dx dy.$$



Om vi gör på samma sätt med en uppdelning av  $D$  med linjer parallella med X-axeln får vi på liknande sätt att:

$$\int_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \frac{dQ}{dx} \, dy dx.$$

genom att addera uttrycken följer nu att:

$$\iint_D \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) \, dx dy = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy.$$

□

**Definition:** En funktion  $f$  är analytisk i ett område  $D$  om den har en derivata i alla punkter i  $D$ .

**Sats 4:** Om  $\Gamma$  är en sluten kurva i det komplexa talplanet och  $f(z)$  är analytisk i området som innesluts av  $\Gamma$  så är:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0.$$

**Bevis:**

Med den vanliga notationen:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  får vi:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} \, dt = \int_a^b [a(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \left( \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) \, dt \\ &= \int_a^b \left[ a(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] \, dt + i \int_a^b \left[ v(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] \, dt \\ \int_{\Gamma} f(z) \, dz &= \int_{\Gamma} (u \, dx - v \, dy) + i \int_{\Gamma} v \, dx + u \, dy \end{aligned}$$

Sats 3 ger nu:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \iint_{D'} \left( -\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) \, dx dy + i \iint_{D'} \left( \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) \, dx dy$$

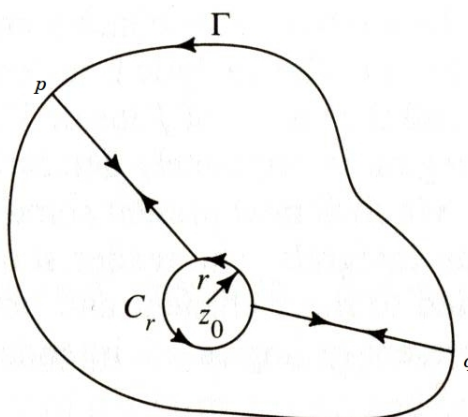
där  $D'$  är området som innesluts av  $\Gamma$ . Men ekvationerna från Sats 2 ger nu att dubbelintegralerna är 0, vilket ger:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0$$

□

**Sats 5:**  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

**Bevis:**



man kan dela upp den slutna kurvan  $\Gamma$  i två kurvor, en som går moturs från  $p$  till  $q$  under  $z_0$ , och en som går moturs från  $q$  till  $p$  över  $z_0$ . Betrakta därefter kurvan från  $p$  till  $q$  som rör sig in mot  $z_0$ , rör sig i en halvcirkel under  $z_0$  och som därefter rör sig mot  $q$  längs en rät linje. Som en följd av Sats 4 gäller det att integralen längs alla kurvor med samma start och slutpunkt är lika. Alltså är integralen längs den ovan beskrivna kurvan och integralen längs delkurvan till  $\Gamma$  från  $p$  till  $q$  lika. Man kan skapa en liknande kurva som rör sig i en halvcirkel ovanför  $z_0$  vars integral är lika med integralen längs delkurvan till  $\Gamma$  som rör sig från  $q$  till  $p$ . Summan av integralen längs delkurvorna till  $\Gamma$  blir lika med integralen längs  $\Gamma$ . Men denna integral blir även lika med summan av integralerna längs de ovan beskrivna kurvorna. Men då integralen längs de båda linjesegmenten tar ut varandra, gäller det att integralen längs  $\Gamma$  är lika med integralen längs en cirkel med radien  $r$ ,  $C_r$ , med centrum i  $z_0$ . Alltså:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \quad (1)$$

substitutionen

$$\begin{aligned} z &= r \cdot e^{iv} + z_0 \\ dz &= r \cdot i \cdot e^{iv} dv \end{aligned}$$

ger i den vänstra integralen:

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0) \cdot r \cdot i \cdot e^{iv}}{r \cdot e^{iv}} dv = [f(z_0) \cdot iv]_0^{2\pi} = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

den högra integralen i (1)  $\rightarrow 0$  då radien av cirkeln  $\rightarrow 0$ . Detta visas genom att sätta  $M_r := \max\{|f(z) - f(z_0)|; z \text{ på } C_r\}$  Detta innebär att

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} \leq \frac{M_r}{r}$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{M_r}{r} l(C_r)$$

där  $l(C_r)$  är längden av kurvan  $C_r$ .

$$\frac{M_r}{r} \cdot l(C_r) = \frac{M_r}{r} \cdot 2r\pi = M_r \cdot 2\pi$$

men då  $f$  är kontinuerlig i punkten  $z_0$  går  $M_r \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 0$ . Alltså är  $\int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$ . Vilket innebär att  $(1) = 2\pi i \cdot f(z_0) + 0$  division med  $2\pi i$  ger:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

□

**Sats 6:**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(n+1)}} dz \cdot n!$$

**Bevis:**

Detta inses genom att derivera uttrycket med avseende på  $z_0$ .

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-1} dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -1 \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -2 \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-3} dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot -1 \cdot -3 \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-4} dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot n! \cdot \int_{\Gamma} f(z) \cdot (z - z_0)^{-(n+1)} dz$$

□

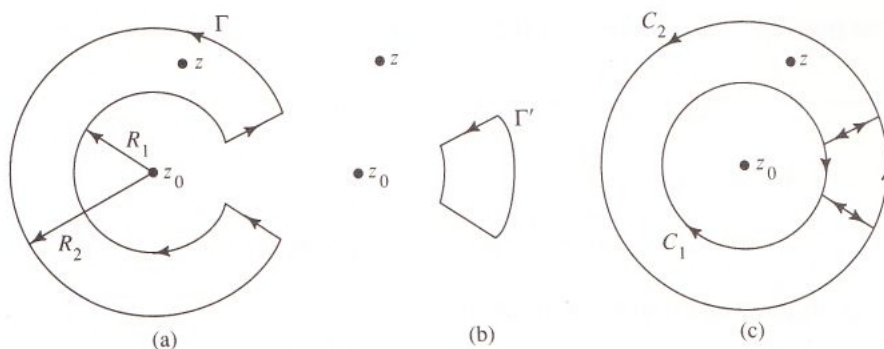
**Sats 7:**

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j. \text{ med } a_j = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}} d\zeta$$

Detta kallas för en Laurent-serie

**Bevis:**

Låt  $\Gamma$  vara en sluten kurva runt  $z$ . Låt därefter  $\Gamma$  se ut som en "donut" med en "bit" borta.



Låt  $\Gamma'$  vara den "borttagna biten". då  $f(z)$  är analytisk i hela området som innesluts av  $\Gamma'$  ger Sats 3 att.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 0$$

därmed följer att vi kan "sätta tillbaka biten". Då integralen var = 0 följer att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma+\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz$$

då integralerna längs linjesegmenten tar ut varandra följer det att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right) \quad (1)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \quad (\text{Taylorpolynom})$$

Sats 6 ger nu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

Om man nu fokuserar på integralen runt  $C_1$  i (1) så ser man att då  $z$  ligger utanför  $C_1$  måste vi integrera kring en annan punkt.

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0) - (z-z_0)} = -\frac{1}{(z-z_0)} \left( \frac{1}{1 - \frac{(\zeta-z_0)}{(z-z_0)}} \right)$$

taylorpolynommet till den högra faktorn ger nu:

$$-\frac{1}{(z-z_0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(\zeta-z_0)}{(z-z_0)} \right)^k$$

insättning i integralen ger nu:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(\zeta) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}} d\zeta \cdot (z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}$$

Där  $a_{-k} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}} d\zeta$ . Ekvation (1) blir nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}$$

□

**Sats 8:** Om  $f$  har en singularitet i punkten  $z_0$  så är linjeintegralen runt singulariteten  $= 2\pi i \cdot a_{-1}$ .

**Bevis:**

Sats 7 ger att  $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$

$$\oint_{C_r} f(z) dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{C_r} (z-z_0)^j dz$$

$$\begin{aligned} z &= e^{iv} + z_0 \\ dz &= ie^{iv} dv \quad \text{för } j \neq -1 \end{aligned}$$

$$\oint_{C_r} (z-z_0)^j dz = \int_0^{2\pi} ie^{ir(j+1)} dv = \left[ i \frac{e^{iv(j+1)}}{i(j+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{för } j = -1 \text{ gäller: } \int_0^{2\pi} ie^{iv(-1+1)} dv = [i \cdot v]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

för alla  $j \neq -1$  blir integralen  $= 0$  och för  $j = -1$  blir integralen lika med  $2\pi i a_{-1}$ . Alltså:

$$\oint_{C_r} f(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

där termen  $a_{-1}$  kallas för residualen

□

**Sats 9:**  $a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z-z_0)$

**Bevis:**

Om  $f(z)$  har en "borttagbar" singularitet i Punkten  $z = z_0$   $\left( \frac{1}{z-z_0} \right)$  blir alla koefficienter till  $f(z)$ 's Laurentserie för  $j < -1 = 0$ . Detta på grund av

att integralen i  $a_k$  för  $k < -1$  inte innesluter en singularitet, och integralen är därmed, enligt Sats 3, lika med 0. Men om  $f(z)$  har en singularitet i punkten  $z = z_0$  gäller:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 \dots \\ f(z)(z - z_0) &= a_{-1} + (z - z_0)(a_0 + a_1(z - z_0) \dots) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) &= a_{-1} + (0)(a_0 + a_1(z - z_0) \dots) = a_{-1} \end{aligned}$$

□

**Hjälpsats 10:** Om  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$ , då är  $\sum_{i=0}^n a_i \cdot b_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n \cdot b_n$

**Bevis:**

$$\begin{aligned} a_k &= A_k - A_{k-1} \\ \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k = \sum_{i=0}^n A_i \cdot b_i - \sum_{k=0}^n A_{k-1} \cdot b_k \end{aligned}$$

i den andra summan substitueras  $k$  mot  $i + 1$

$$\sum_{k=0}^n A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot b_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$

vi har nu

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^n A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$

**Hjälpsats 11:**  $(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \cdot \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx$

**Bevis:**

$$s \cdot \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx = -[x^{-s}]_n^{n+1} = -((n+1)^{-s} - n^{-s}) = n^{-s} - (n+1)^{-s}$$

□

**Definition:**  $[x] =$  heltalsdelen av  $x$

exempel:

$$[\pi] = 3, \quad [e] = 2, \quad [38.5] = 38$$

**Definition:**  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

exempel:

$$\{\pi\} = 0.14159265358979\dots, \quad \{e\} = 0.72182818284590\dots, \quad \{38.5\} = 0.5$$

**Hjälpsats 12:**  $\frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx + s \cdot \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$

**Bevis:**

$$\begin{aligned} s \cdot \int_1^\infty x^{-s-1} (\lfloor x \rfloor + \{x\}) dx &= s \cdot \int_1^\infty x^{-s} dx \\ &= s \cdot \left[ \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^\infty = \frac{1^{1-s}}{1-s} \cdot s = \frac{s}{1-s} \end{aligned}$$

□

**Sats 13:**  $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$

**Bevis:**

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq n} \frac{1}{n^s}$$

Hjälpsats 10 ger:

$$\sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \leq 1} n \cdot (n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

Hjälpsats 11 ger nu att:

$$s \sum_{n \leq 1} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \sum_{n \leq 1} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx = s \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx$$

Hjälpsats 12 ger slutligen att:

$$\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx = \zeta(s)$$

□

**Sats 14:**  $\zeta(s)$  har en singularitet i  $s = 1$  med residualen 1.

**Bevis:**

Sats 9 visar att residualen =  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$

$$\zeta(s) \cdot (s-1) = \left( \frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx \right) (s-1)$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s)(s-1) = \lim_{s \rightarrow 1} s - s(s-1) \cdot \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx = 1 - 0 = 1$$

□

## Källor:

Arne Persson & Lars-Christer Böiers, (2005), *Analys i Flera Variabler*. Lunds Studentlitteratur AB.

E. B Saff & A. D. Snider, (1993), *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, And Engineering*, Upper Saddle River, New Jersey: Simon & Schutser Company.

Elias M. Stein & Rami Shakarchi, (2003), *Fourier Analysis An Introduction*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Eric Naslund, (2011), *Zeros on the Critical Line* [Digital].

Tillgänglig:

<http://www.math.ubc.ca/~gerg/teaching/613-Winter2011/ZerosCriticalLine.pdf>

Okänd, (2007), *Notes on the Riemann Zeta Function* [Digital]

Tillgänglig:

[http://people.math.gatech.edu/~ecroot/riemann\\_notes.pdf](http://people.math.gatech.edu/~ecroot/riemann_notes.pdf)

Robert B. Nash, (Okänd), *Complex Variables (Chapter 7, The Prime Number Theorem)* [Digital].

Tillgänglig:

<http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV/CV7.pdf>